Võreteooria

Osalise järjestuse seos

Def. Osalise järjestuse seos on relatsioon

$\sqsubseteq : L \times L \longrightarrow \{true, false\}$, mis on:

- refleksiivne $\forall l : l \sqsubseteq l$
- transitiivne $\forall l_1, l_2, l_3 : l_1 \sqsubseteq l_2 \land l_2 \sqsubseteq l_3 \Rightarrow l_1 \sqsubseteq l_3$
- antisümmeetriline $\forall l_1, l_2 : l_1 \sqsubseteq l_2 \land l_2 \sqsubseteq l_1 \Rightarrow l_1 = l_2$

Osaliselt järjestatud hulk

Def. Osaliselt järjestatud hulk $(L,\sqsubseteq)$ on hulk L, millel on defineeritud osalise järjestuse seos $\sqsubseteq$.

Alamtõke ja alamraja

Def. Olgu Y järjestatud hulga L alamhulk. Elementi $l \in L$ nimetatakse alamhulga Y **alamtõkkeks** (*lower bound*), kui iga $l' \in Y$ korral $l \sqsubseteq l'$.

Def. Elementi $l \in L$ nimetatakse alamhulga Y **alamrajaks** (*the greatest lower bound*), $\sqcap Y$, kui alamhulga Y mistahes teise alamtõkke l' korral $l' \sqsubseteq l$.

Ülemtõke ja ülemraja

Def. Olgu Y järjestatud hulga L alamhulk. Elementi $l \in L$ nimetatakse alamhulga Y **ülemtõkkeks** (upper *bound*), kui iga $l' \in Y$ korral $l' \sqsubseteq l$.

Def. Elementi $l \in L$ nimetatakse alamhulga Y **ülemrajaks** (*the least upper bound*), $\sqcup Y$, kui alamhulga Y mistahes teise alamtõkke l' korral $l \sqsubseteq l'$.

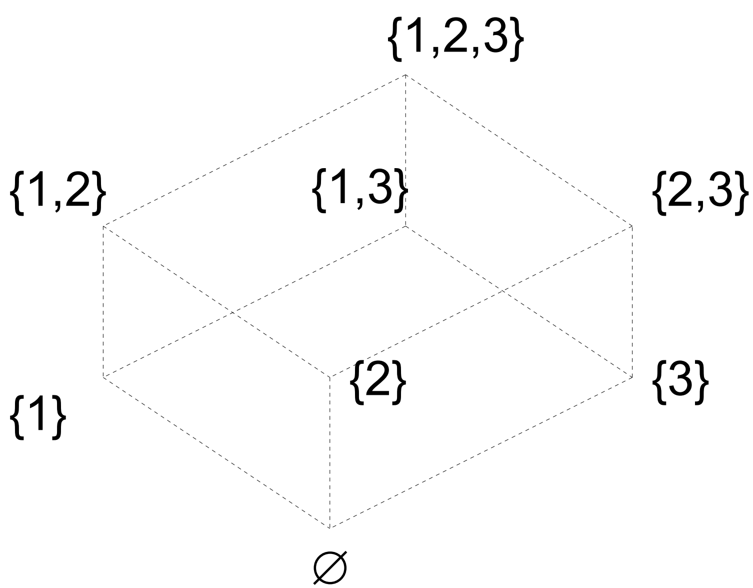
Täielik võre

Def. Täielik võre $L = (L,\sqsubseteq) = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ on selline osaliselt järjestatud hulk $(L,\sqsubseteq)$, mille kõigil alamhulkadel on ülem- ja alamrajad.

$\bot = \sqcup\varnothing = \sqcap L$ on vähim element.
$\top = \sqcap\varnothing = \sqcup L$ on suurim element.

Näide

$$L = (P(S), \subseteq),\ S = \{1,2,3\}.$$



Lemma (A.2)

Osaliselt järjestatud hulga $L = (L, \sqsubseteq)$ jaoks on väited

1) L on täielik võre,
2) igal L alamhulgal leidub ülemraja,
3) igal L alamhulgal leidub alamraja

ekvivalentsed.

Tõestus

1) $\Rightarrow$ 2)
1) $\Rightarrow$ 3)

2) $\Rightarrow$ 1) Olgu $Y \subseteq L$,
defineerime $\sqcap Y = \sqcup\{l \in L \mid \forall l' \in Y\colon l \sqsubseteq l'\}$

3) $\Rightarrow$ 1) Olgu $Y \subseteq L$,
defineerime $\sqcup Y = \sqcap\{l \in L \mid \forall l' \in Y\colon l' \sqsubseteq l\}$

Moore family

Täieliku võre $L = (L,\sqsubseteq)$ alamhulk Y, mille korral kehtib:
$\forall Y' \subseteq Y: \sqcap Y' \in Y$.

- Sisaldab alati vähimat elementi, $\sqcap Y$
- Sisaldab alati suurimat elementi, $\sqcap\emptyset$, mis on võrdne L suurima elemendiga $\top$.
- Ei ole kunagi tühi

Näide

$L = (P(S), \subseteq)$

- (+)
$\{\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
$\{\varnothing,\{1,2,3\}\}$

- (-)
$\{\{1\},\{2\}\}$
$\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

Funktsioonide omadusi

Funktsioon f: $L_1 \rightarrow L_2$, kus $L_1 = (L_1, \sqsubseteq_1)$ ja $L_2 = (L_2, \sqsubseteq_2)$ on osaliselt järjestatud hulgad.

- **Sürjektiivsus:** $\forall l_2 \in L_2 \colon \exists l_1 \in L_1 \colon f(l_1) = l_2$
- **Injektiivsus:** $\forall l, l' \in L_1 \colon f(l) = f(l') \Rightarrow l = l'$
- **Monotoonsus:** $\forall l, l' \in L_1 \colon l \sqsubseteq_1 l' \Rightarrow f(l) \sqsubseteq_2 f(l')$
- **Aditiivsus:** $\forall l_1 l_2 \in L_1 \colon f(l_1 \sqcup l_2) = f(l_1) \sqcup f(l_2)$

- **Multiplikatiivsus:** $\forall l_1 l_2 \in L_1 : f(l_1 \sqcap l_2) = f(l_1) \sqcap f(l_2)$

- **Täielik aditiivsus:** Iga $Y \subseteq L_1$ korral
$f(\sqcup_1 Y) = \sqcup_2 \{f(l') \mid l' \in Y\}$, kui $\sqcup_1 Y$ eksisteerib

- **Täielik multiplikatiivsus:** Iga $Y \subseteq L_1$ korral
$f(\sqcap_1 Y) = \sqcap_2 \{f(l') \mid l' \in Y\}$, kui $\sqcap_1 Y$ eksisteerib

- **Pidevus:** Iga mittetühja $Y \subseteq L_1$ korral
$f(\sqcup_1 Y) = \sqcup_2 \{f(l') \mid l' \in Y\}$, kui $\sqcup_1 Y$ eksisteerib

- **Rangus:** $f(\perp_1) = \perp_2$

Lemma (A.4)

Kui $L = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ ja $M = (M, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ on täielikud võred, kusjuures M on lõplik, siis tingimused:

1) $\gamma\colon M \rightarrow L$ on monotoonne,
2) $\gamma(\top) = \top$,
3) $\gamma(m_1 \sqcap m_2) = \gamma(m_1) \sqcap \gamma(m_2)$,
kui $m_1 \not\sqsubseteq m_2 \wedge m_2 \not\sqsubseteq m_1$

on ekvivalentsed väitega, et $\gamma\colon M \rightarrow L$ on täielikult multiplikatiivne.

Tõestus

Kui γ on täielikult multiplikatiivne, siis kehtivad kõik kolm tingimust.

Kui $m_1 \sqsubseteq m_2 \vee m_2 \sqsubseteq m_1$, siis monotoonsuse tõttu kehtib $\gamma(m_1 \sqcap m_2) = \gamma(m_1) \sqcap \gamma(m_2)$.

Tõestame induktsiooniga hulga $M' \subseteq M$ liikmete arvu n järgi, et $\gamma(\sqcap M') = \sqcap\{\gamma(m) \mid m \in M'\}$.

I) $n=0$, võrdus järeldub tingimusest 2.

II) $n>0$, $\mathrm{M}' = \mathrm{M}'' \cup \{\mathrm{m}''\}$, kus $\mathrm{m}'' \notin \mathrm{M}''$.

$$
\begin{aligned}
\gamma(\sqcap \mathrm{M}') &= \gamma((\sqcap \mathrm{M}'') \sqcap \mathrm{m}'') = \\
&= \gamma(\sqcap \mathrm{M}'') \sqcap \gamma(\mathrm{m}'') = \\
&= (\sqcap\{\gamma(\mathrm{m}) \mid \mathrm{m} \in \mathrm{M}''\}) \sqcap \gamma(\mathrm{m}'') = \\
&= \sqcap\{\gamma(\mathrm{m}) \mid \mathrm{m} \in \mathrm{M}'\}
\end{aligned}
$$

Isomorfism

Def. Isomorfism osaliselt järjestatud hulgast $(L_1,\sqsubseteq_1)$ osaliselt järjestatud hulka $(L_2,\sqsubseteq_2)$ on selline monotoonne funktsioon $\theta: L_1 \rightarrow L_2$, mille korral eksisteerib monotoonne funktsioon $\theta^{-1}: L_2 \rightarrow L_1$ $\theta \circ \theta^{-1} = id_2$ ja $\theta^{-1} \circ \theta = id_1$, kus id_i on identsusfunktsioon üle L_i, $i = 1,2$.

Cartesian product

Olgu $L_1 = (L_1, \sqsubseteq_1)$ ja $L_2 = (L_2, \sqsubseteq_2)$ osaliselt järjestatud hulgad. Olgu $L = (L, \sqsubseteq)$, defineerime

$L = \{(l_1, l_2) \mid l_1 \in L_1 \wedge l_2 \in L_2\}$ ja

$(l_{11}, l_{21}) \sqsubseteq (l_{12}, l_{22})$ kui $l_{11} \sqsubseteq_1 l_{12} \wedge l_{21} \sqsubseteq_2 l_{22}$

Siis on ka L osaliselt järjestatud hulk.

Kui $L_i = (L_i, \sqsubseteq_i, \sqcup_i, \sqcap_i, \bot_i, \top_i)$ on täielikud võred, siis on seda ka L ja kehtib

$\sqcup Y = (\sqcup_1 \{l_1 \mid \exists l_2 : (l_1, l_2) \in Y\}, \sqcup_2 \{l_2 \mid \exists l_1 : (l_1, l_2) \in Y\})$

ja $\bot = (\bot_1, \bot_2)$.

Sama kehtib $\sqcap Y$ ja $\top$ kohta.

Tähistatakse $L_1 \times L_2$

Total function space

Olgu $L_1 = (L_1, \sqsubseteq_1)$ osaliselt järjestatud hulk ja S suvaline hulk. Olgu $L = (L, \sqsubseteq)$, defineerime

$L = \{f\colon S \to L_1 \mid f$ – total function$\}$ ja

$f \sqsubseteq f'$ kui $\forall s \in S\colon f(s) \sqsubseteq_1 f'(s)$

Siis on L samuti osaliselt järjestatud hulk.

Kui $L_1 = (L_1, \sqsubseteq_1, \sqcup_1, \sqcap_1, \perp_1, \top_1)$ on täielik võre, siis on seda ka L ja lisaks kehtib

$\sqcup Y = \lambda s.\sqcup_1 \{f(s) \mid f \in Y\}$ ja $\perp = \lambda s.\perp_1$

Sama kehtib $\sqcap Y$ ja $\top$ kohta.

Tähistatakse $S \to L_1$

Monotone function space

Olgu $L_1 = (L_1, \sqsubseteq_1)$ ja $L_2 = (L_2, \sqsubseteq_2)$ osaliselt järjestatud hulgad. Olgu $L = (L, \sqsubseteq)$, defineerime

$L = \{f\colon L_1 \to L_2 \mid f$ – monotone function$\}$ ja

$f \sqsubseteq f'$ kui $\forall l_1 \in L_1\colon f(l_1) \sqsubseteq_2 f'(l_1)$

Siis on L samuti osaliselt järjestatud hulk.

Kui $L_i = (L_i, \sqsubseteq_i, \sqcup_i, \sqcap_i, \perp_i, \top_i)$ on täielik võre, siis on seda ka L ja lisaks kehtib

$\sqcup Y = \lambda l_1.\sqcup_2 \{f(l_1) \mid f \in Y\}$ ja $\perp = \lambda l_1.\perp_2$

Sama kehtib $\sqcap Y$ ja $\top$ kohta.

Tähistatakse $L_1 \to L_2$

Ahelad

Def. Osaliselt järjestatud hulga $L = (L,\sqsubseteq)$ alamhulka $Y \subseteq L$ nimetatakse ahelaks, kui

$\forall l_1,l_2 \in Y: (l_1 \sqsubseteq l_2) \vee (l_2 \sqsubseteq l_1)$

Lõplik ahel – ahel, mis on hulga L lõplik alamhulk.

Jada $(l_n)_n = (l_n)_{n\in N}$ on kasvav ahel, kui $n \leq m \Rightarrow l_n \sqsubseteq l_m$.

Jada $(l_n)_n = (l_n)_{n\in N}$ on kahanev ahel, kui $n \leq m \Rightarrow l_m \sqsubseteq l_n$.

Jada nimetatakse stabiliseeruvaks, kui

$\exists n_0 \in N: \forall n \in N: n \geq n_0 \Rightarrow l_n = l_{n0}$

Püsipunkt

Def. Olgu täielikul võrel $L = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ defineeritud monotoonne funktsioon f: $L \longrightarrow L$. Funktsiooni püsipunktiks nimetatakse elementi $l \in L$, mille korral $f(l) = l$.

Funktsiooni püsipunktide hulka tähistatakse
$Fix(f) = \{l \mid f(l) = l\}$

Reduktiivne ja ekstensiivne funktsioon

Def. Funktsiooni nimetatakse elemendil l reduktiivseks, kui $f(l) \sqsubseteq l$.

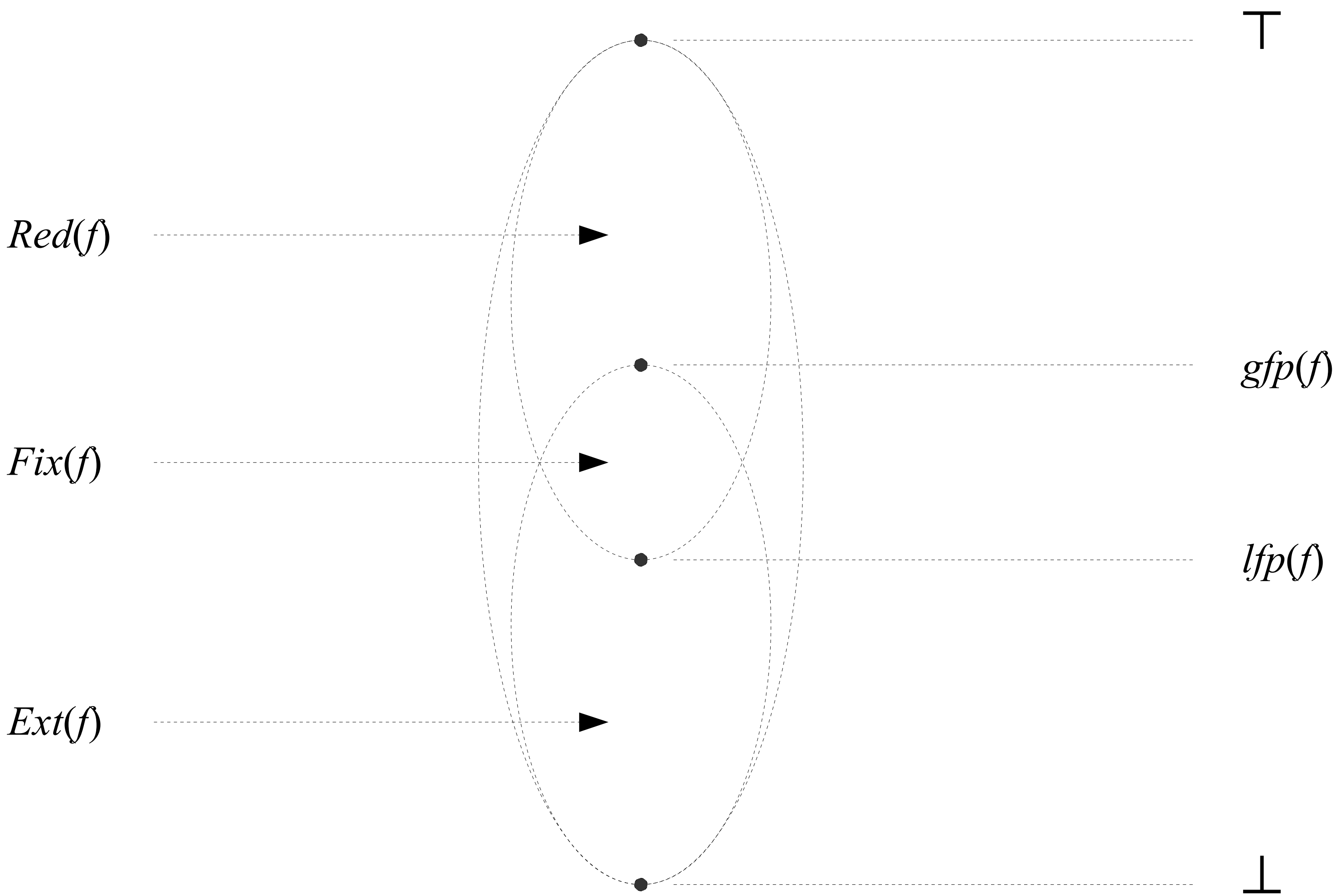
$Red(f) = \{l \mid f(l) \sqsubseteq l\}$.

Funktsiooni nimetatakse reduktiivseks, kui $Red(f) = L$.

Def. Funktsiooni nimetatakse elemendil l ekstensiivseks, kui $l \sqsubseteq f(l)$.

$Ext(f) = \{l \mid l \sqsubseteq f(l)\}$.

Funktsiooni nimetatakse ekstensiivseks, kui $Ext(f) = L$.



Red(f)
Fix(f)
Ext(f)
⊤
gfp(f)
lfp(f)
⊥

Tarski püsipunktiteoreem

Olgu $L = (L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ täielik võre. Kui $f\colon L \to L$ on monotoonne funktsioon, siis kehtib:

$$lfp(f) = \sqcap Red(f) \in Fix(f)$$
$$gfp(f) = \sqcup Ext(f) \in Fix(f)$$

Tõestus

Defineerime $l_0 = \sqcap Red(f)$.

1) Näitame, et $f(l_0) \sqsubseteq l_0$

nii, et $l_0 \in Red(f)$.

Kuna $l_0 \sqsubseteq l$ iga $l \in Red(f)$ korral ja f on monotoonne,

siis $f(l_0) \sqsubseteq f(l) \sqsubseteq l$ iga $l \in \mathrm{Red}(f)$ korral ja seega

$f(l_0) \sqsubseteq l_0$.

2) Näitame, et $l_0 \sqsubseteq f(l_0)$

$f(f(l_0)) \sqsubseteq f(l_0)$, järelikult $f(l_0) \in Red(f)$ ja $l_0 \sqsubseteq f(l_0)$.

$gfp(f)$ kohta tõestatakse sarnaselt.

Püsipunkt *FIX F*

Defineerime järjestuse osalistel funktsioonidel $State \hookrightarrow State$. Kirjutame $g_1 \sqsubseteq g_2$, kui kehtib, et

$g_1\ s = s' \Rightarrow g_2\ s = s'$ iga s ja s' korral.

Olgu osalised funktsioonid $State \hookrightarrow State$ g_1, g_2, g_3 ja g_4 defineeritud järgmiselt:

$$g_1\, s = s \text{ iga } s \text{ korral}$$

$$g_2\, s = \begin{cases} s\,, \text{ kui } s\,x \geq 0 \\ undef \text{ muul juhul} \end{cases}$$

$$g_3\, s = \begin{cases} s, \text{ kui } s\,x = 0 \\ undef \text{ muul juhul} \end{cases}$$

$$g_4\, s = \begin{cases} s, \text{ kui } s\,x \leq 0 \\ undef \text{ muul juhul} \end{cases}$$

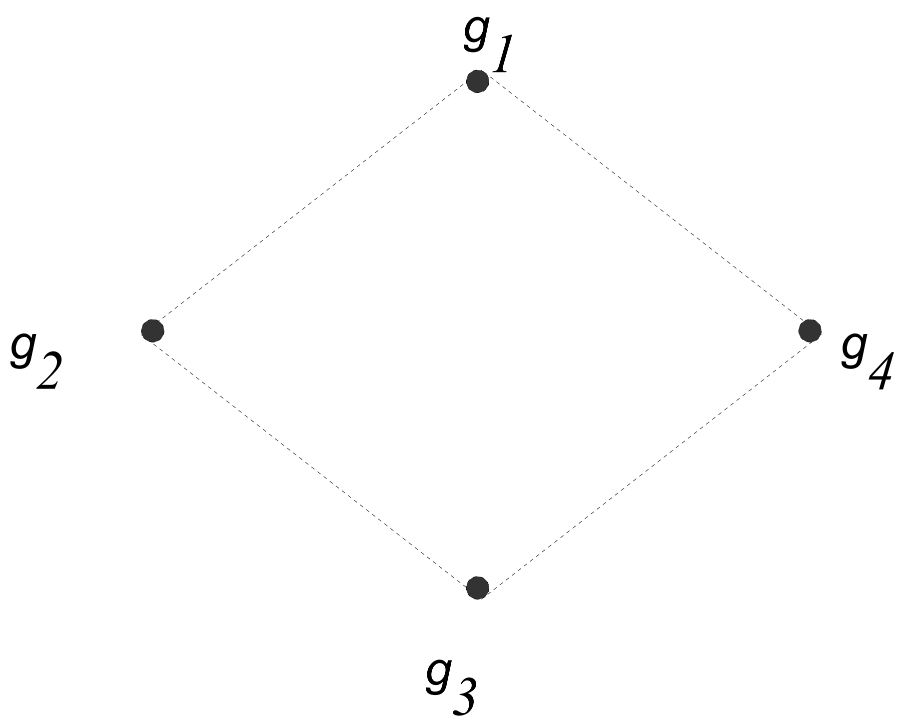
Siis kehtivad:

- $g_1 \sqsubseteq g_1$
- $g_2 \sqsubseteq g_1$, $g_2 \sqsubseteq g_2$
- $g_3 \sqsubseteq g_1$, $g_3 \sqsubseteq g_2$, $g_3 \sqsubseteq g_3$, $g_3 \sqsubseteq g_4$
- $g_4 \sqsubseteq g_1$, $g_4 \sqsubseteq g_4$

Ei kehti:

- $g_2 \sqsubseteq g_4$
- $g_4 \sqsubseteq g_2$

Hasse diagramm



Näide

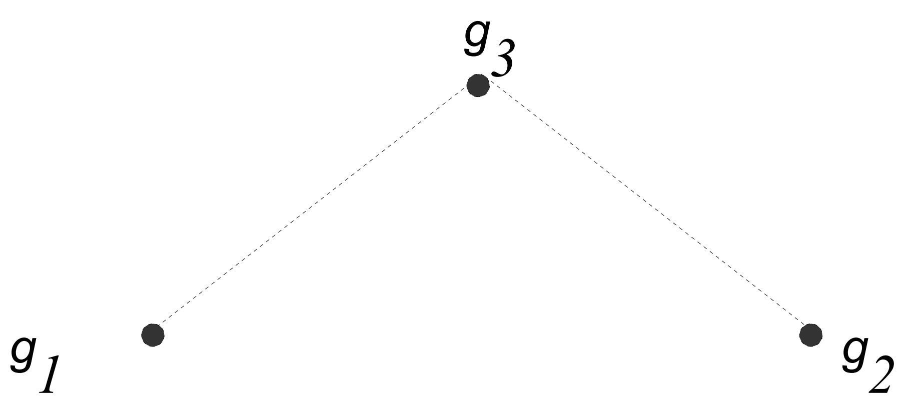
Olgu g_1, g_2 ja g_3 defineeritud järgmiselt:

$$g_1\, s = \begin{cases} s, \text{ kui } s\, x \text{ on paaris} \\ \mathit{undef} \text{ muul juhul} \end{cases}$$

$$g_2\, s = \begin{cases} s, \text{ kui } s\, x \text{ on algarv} \\ \mathit{undef} \text{ muul juhul} \end{cases}$$

$$g_3\, s = s$$

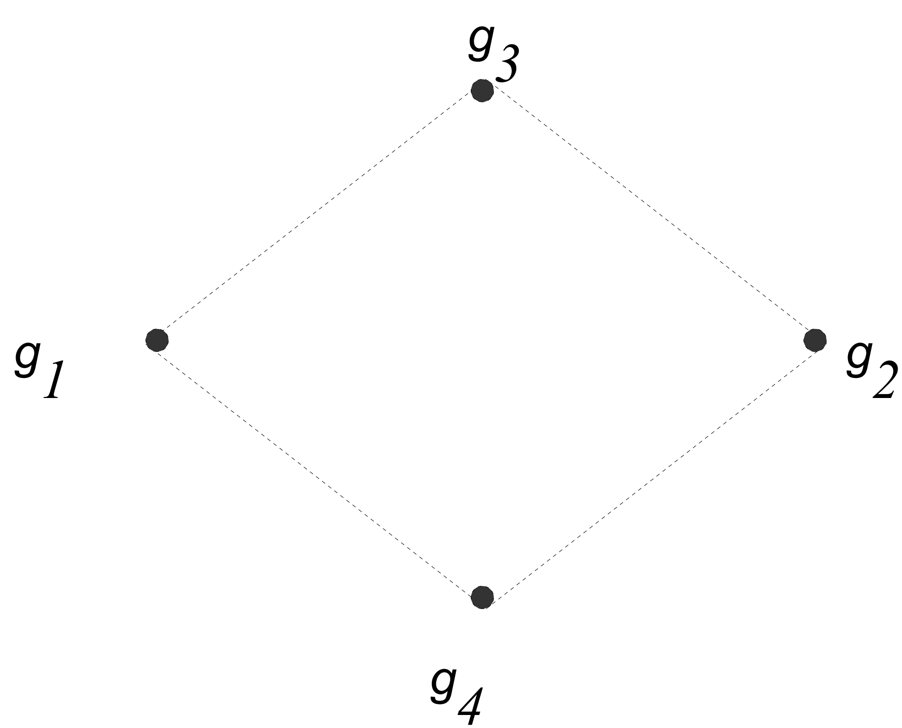
Järjestus: $g_1 \sqsubseteq g_3$, $g_2 \sqsubseteq g_3$



Lisades osalise funktsiooni g_4 nii, et

$g_4 \sqsubseteq g_1$, $g_4 \sqsubseteq g_2$ ja $g_4 \sqsubseteq g_3$,

saame:

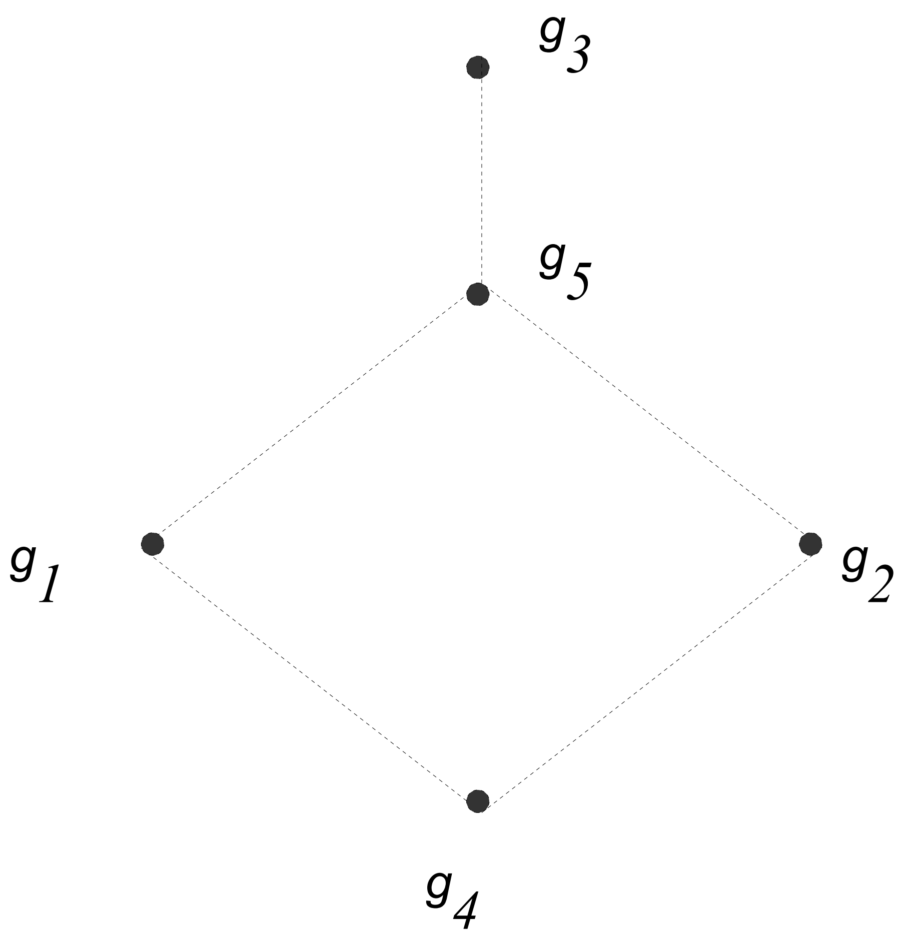


Lisades osalise funktsiooni g_5 nii, et kehtib

$g_1 \sqsubseteq g_5$, $g_2 \sqsubseteq g_5$ ja $g_5 \sqsubseteq g_3$ ja

$g_5 \neq g_1$, $g_5 \neq g_2$, $g_5 \neq g_3$,

saame:



Relatsiooni $\sqsubseteq$ osalistel funktsioonidel *State* $\hookrightarrow$ *State* võib kirjeldada järgmiselt:

$g_1 \sqsubseteq g_2$ parajasti siis, kui $graph(g_1) \subseteq graph(g_2)$, kus $graph(g)$ on osalise funktsiooni g graafik.

Graafiku def: $graph(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid f\,x = y\}$.

Osalise funktsiooni g korral:
$graph(g) = \{(s,s') \mid g\,s = s'\}$.

Osaliselt järjestatud hulkade $(D, \sqsubseteq)$ puhul kehtib:

- refleksiivsus $d \sqsubseteq d$
- transitiivsus $d_1 \sqsubseteq d_2$ ja $d_2 \sqsubseteq d_3 \Rightarrow d_1 \sqsubseteq d_3$
- antisümmeetrilisus $d_1 \sqsubseteq d_2$ ja $d_2 \sqsubseteq d_1 \Rightarrow d_1 = d_2$

Kui elemendi $d \in D$ korral kehtib
$d \sqsubseteq d'$ iga d' korral,
siis elementi d nimetatakse hulga D vähimaks elemendiks $\perp$ ja öeldakse, et see ei sisalda informatsiooni.

Kui osaliselt järjestatud hulgal $(D, \sqsubseteq)$ leidub vähim element d, siis on d unikaalne.

Tõestus: Oletame, et hulgal $(D,\sqsubseteq)$ leidub kaks vähimat elementi d_1 ja d_2.

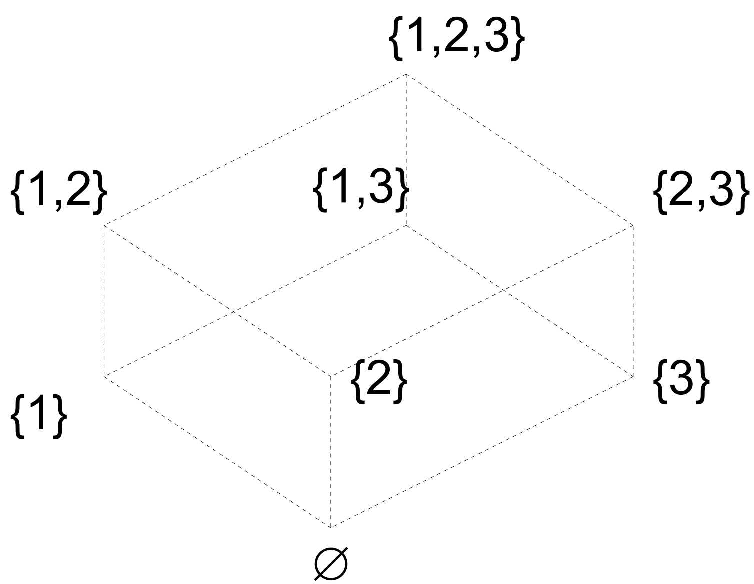
Kuna d_1 on vähim element, siis peab kehtima
$d_1 \sqsubseteq d_2$.

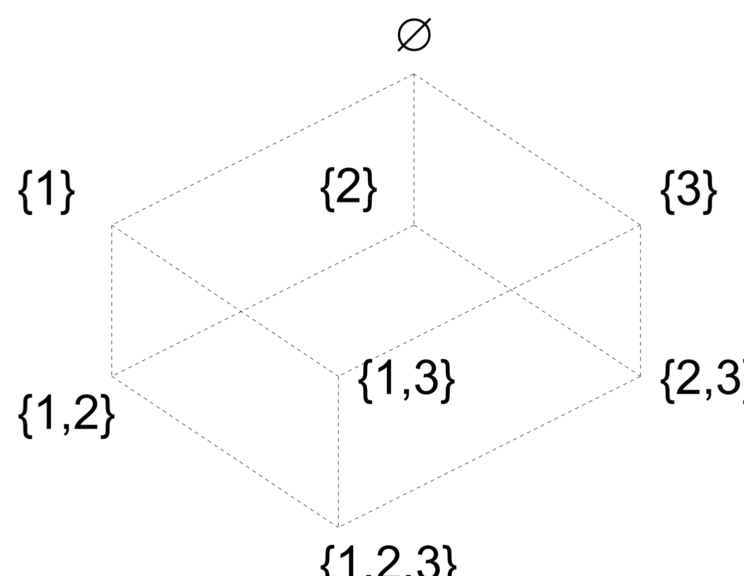
Kuna d_2 on vähim element, peab kehtima
$d_2 \sqsubseteq d_1$.

Antisümmeetrilisuse tõttu järeldub, et $d_1 = d_2$.

Kui $P(S) = \{K \mid K \subseteq S\}$
$(P(S),\subseteq)$ ja $(P(S),\supseteq)$ on osaliselt järjestatud hulgad, sest kehtivad refleksiivsus, transitiivsus ja antisümmeetrilisus.

$S = \{a,b,c\}$
Hulga $(P(S),\subseteq)$ vähim element on $\varnothing$.
Hulga $(P(S),\supseteq)$ vähim element on $\{1,2,3\}$.





Lemma (5.13)

Olgu ($State \hookrightarrow State$, $\sqsubseteq$) osaliselt järjestatud hulk.
Osaline funktsioon $\perp$: $State \hookrightarrow State$, mis on
defineeritud järgmiselt:
$\perp s$ = undef iga s korral
on $State \rightarrow State$ vähim element.

Tõestus

Vaja tõestada, et:

1) $\sqsubseteq$ täidab osalise järjestuse tingimusi
2) $\perp$ on $\mathit{State} \hookrightarrow \mathit{State}$ vähim element

FIX F

- $FIX\ F$ on F-i püsipunkt ($F(FIX\ F) = FIX\ F$)

- $FIX\ F$ on vähim F-i püsipunktidest, st
kui $F\ g = g$, siis $FIX \sqsubseteq F\ g$.

Kui F-il leidub vähim püsipunkt g_0, siis g_0 on unikaalne.

Ahel(*chain*) – hulk, mille korral iga kaks elementi on võrreldavad.

St iga d_1, $d_2 \in Y$ korral $d_1 \sqsubseteq d_2$ või $d_2 \sqsubseteq d_1$, kui
(D, $\sqsubseteq$) on osaliselt järjestatud hulk ja $Y \in D$.

Täielik osaliselt järjestatud hulk (*chain complete partially ordered set*) – osaliselt järjestatud hulk, mille korral, kui $Y \subseteq D$ ja Y on ahel, siis eksisteerib $\sqcup Y$.

Kui $\sqcup Y$ eksisteerib iga $Y \subseteq D$ korral, siis nimetatakse hulka D täielikuks võreks (*complete lattice*).

Kui $(D,\sqsubseteq)$ on täielik osaliselt järjestatud hulk, siis tal leidub vähim element $\bot = \sqcup\, \varnothing$.

<u>Tõestus:</u>

$\varnothing$ on ahel.

$(D,\sqsubseteq)$ on täielik osaliselt järjestatud hulk, järelikult $\sqcup\, \varnothing$ eksisteerib.

$\sqcup\, \varnothing$ definitsiooni järgi kehtib $\sqcup\, \varnothing \sqsubseteq d$, iga $d \in D$ korral.

Järelikult on $\sqcup\, \varnothing$ hulga D vähim element.

Lemma (5.25)

Olgu ($State \hookrightarrow State$, $\sqsubseteq$) täielik osaliselt järjestatud hulk. Ahela Y ülemraja $\sqcup Y$ avaldub järgmiselt

$$graph(\sqcup Y) = \bigcup\{graph(g) \mid g \in Y\}.$$

St. $(\sqcup Y)\ s = s' \Leftrightarrow g\ s = s'$ mingi $g \in Y$ jaoks.

Tõestus

Tõestame, et:

1) $\bigcup \{graph(g) \mid g \in Y\}$ on osalise funktsiooni $State \hookrightarrow State$ graafik.

2) $\bigcup \{graph(g) \mid g \in Y\}$ on hulga Y ülemtõke.

3) $\bigcup \{graph(g) \mid g \in Y\}$ on hulga Y ülemraja.

Kui $<s,s'>$ ja $<s,s''>$ on $X = \bigcup \{graph(g) \mid g \in Y\}$ elemendid, siis $s' = s''$.

Kui $<s,s'> \in X$, siis $\exists g \in Y$ nii, et $g\ s = s'$.
Kui $<s,s''> \in X$, siis $\exists g' \in Y$ nii, et $g'\ s = s''$.

Kuna Y on ahel, siis kas $g \sqsubseteq g'$ või $g' \sqsubseteq g$. Mõlemal juhul saame, et $g\ s = g'\ s \Rightarrow s' = s''$.

Defineerime osalise funktsiooni g_0 nii, et

$$graph(g_0) = \bigcup \{graph(g) \mid g \in Y\}.$$

Siis kehtib suvalise $g \in Y$ korral

$$graph(g) \subseteq graph(g_0)$$

Järelikult $g \sqsubseteq g_0$ ja $g_0 = \sqcup Y$.

Olgu g_1 mingi Y ülemtõke. Siis kehtib

$g \sqsubseteq g_1$ iga $g \in Y$ korral.

Järelikult kehtib

$graph(g) \subseteq graph(g_1)$

Siis peab kehtima ka

$\bigcup \{graph(g) \mid g \in Y\} \subseteq graph(g_1)$

ja

$graph(g_0) \subseteq graph(g_1)$

$\Downarrow$

$g_0 \sqsubseteq g_1$

g_0 on vähim ülemtõketest, seega ülemraja.

Monotoonsus

Olgu $(D, \sqsubseteq)$ ja $(D', \sqsubseteq')$ täielikud osaliselt järjestatud hulgad ja olgu f: $D \rightarrow D'$ funktsioon.
f on monotoonne parajasti siis, kui
$d_1 \sqsubseteq d_2 \Rightarrow f\, d_1 \sqsubseteq' f\, d_2$ iga d_1 ja d_2 jaoks.

Näide

Monotoonne funktsioon:

Olgu funktsioon f_1: $P(\{a,b,c\}) \rightarrow P(\{d,e\})$ defineeritud järgmiselt:

X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\varnothing$
$f_1 X$	$\{d,e\}$	$\{d\}$	$\{d,e\}$	$\{d,e\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\varnothing$

Mittemonotoonne funktsioon:

Olgu funktsioon f_2: $P(\{a,b,c\}) \rightarrow P(\{d,e\})$ defineeritud järgmiselt:

X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\varnothing$
$f_2 X$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$

Olgu $(D, \sqsubseteq)$, $(D', \sqsubseteq')$ ja $(D'', \sqsubseteq'')$ täielikud osaliselt järjestatud hulgad ja olgu $f: D \to D'$ ja $f': D' \to D''$ monotoonsed funktsioonid.

Siis on ka $f' \circ f: D \to D''$ monotoonne funktsioon.

<u>Tõestus:</u> Oletame, et $d_1 \sqsubseteq d_2$. Funktsiooni f monotoonsuse tõttu $f\, d_1 \sqsubseteq' f\, d_2$. Funktsiooni f' monotoonsuse tõttu $f'(f\, d_1) \sqsubseteq'' f'(f\, d_2)$.

Lemma (5.30)

Olgu $(D, \sqsubseteq)$ ja $(D', \sqsubseteq')$ täielikud osaliselt järjestatud hulgad ja olgu f: $D \to D'$ monotoonne funktsioon. Kui Y on D ahel, siis $\{f\,d \mid d \in Y\}$ on D' ahel. Lisaks kehtib $\bigsqcup'\{f\,d \mid d \in Y\} \sqsubseteq' f\,(\bigsqcup Y)$.

Tõestus

- Kui $Y=\emptyset$

kehtib, sest $\bot' \sqsubseteq' f\,\bot$

- Kui $Y \neq \emptyset$

Tõestame, et $\{f\,d \mid d \in Y\}$ on D' ahel.

Olgu d_1' ja d_2' kaks $\{f\,d \mid d \in Y\}$ elementi. Siis leiduvad kaks Y elementi d_1 ja d_2 nii, et $d_1' = f\,d_1$ ja $d_2' = f\,d_2$.

Kuna Y on ahel, siis kas $d_1 \sqsubseteq d_2$ või $d_2 \sqsubseteq d_1$. Mõlemal juhul saame, et sama järjekord kehtib d_1' ja d_2' vahel funktsiooni monotoonsuse tõttu. Järelikult

$\{f\,d \mid d \in Y\}$ on ahel.

Olgu d suvaline Y element. Siis $d \sqsubseteq \bigsqcup Y$. Funktsiooni f monotoonsuse tõttu kehtib
$f\,d \sqsubseteq' f\,(\bigsqcup Y)$.

Kuna see kehtib iga $d \in Y$ kohta, siis on
$f\,(\bigsqcup Y)$ hulga $\{f\,d \mid d \in Y\}$ ülemtõke.
St $\bigsqcup' \{f\,d \mid d \in Y\} \sqsubseteq' f\,(\bigsqcup Y)$.

Funktsioon ei pruugi ahela ülemraja säilitada.
St. võrdus $\sqcup'\{f\,d \mid d \in Y\} = f\,(\sqcup Y)$
ei pruugi kehtida.

Funktsioon f: $D \to D'$, mis on defineeritud hulkadel $(D, \sqsubseteq)$ ja $(D', \sqsubseteq')$ on pidev, kui see on monotoonne ja võrdus $\sqcup' \{f\, d \mid d \in Y\} = f\,(\sqcup Y)$
kehtib iga mittetühja ahela Y korral.

Kui $\sqcup \{f\, d \mid d \in Y\} = f\,(\sqcup Y)$ kehtib ka tühja ahela korral ($\perp = f\,\perp$), siis nimetatakse funktsiooni agaraks.

Lemma (5.35)

Olgu $(D, \sqsubseteq)$, $(D', \sqsubseteq')$ ja $(D'', \sqsubseteq'')$ täielikud järjestatud hulgad ja olgu funktsioonid $f\colon D \to D'$ ja $f'\colon D' \to D''$ pidevad. Siis on ka $f' \circ f\colon D \to D''$ pidev funktsioon.

Tõestus

$f' \circ f$ on monotoonne funktsioon.

Olgu Y mittetühi D ahel.
Funktsiooni f pidevuse tõttu kehtib
$\sqcup'\{f\,d \mid d \in Y\} = f\,(\sqcup Y)$.

Kuna $\{f\,d \mid d \in Y\}$ on D' ahel, siis funktsiooni f' pidevuse tõttu kehtib
$\sqcup''\{f'\,d' \mid d' \in \{f\,d \mid d \in Y\}\} = f'\,(\sqcup'\{f\,d \mid d \in Y\})$,
mis on samaväärne valemiga
$\sqcup''\{f'\,(f\,d) \mid d \in Y\} = f'(f\,(\sqcup Y))$.

Teoreem (5.37)

Olgu f: $D \to D$ pidev funktsioon täielikul osaliselt järjestatud hulgal $(D, \sqsubseteq)$ vähima elemendiga $\perp$.
Siis $FIX\, f = \sqcup\{f^n \perp \mid n \geq 0\}$
defineerib hulga D elemendi, mis on funktsiooni f vähim püsipunkt.

$f^0 = id$
$f^{n+1} = f \circ f^n,\ n \geq 0$

Tõestus

$f^{0} \perp = \perp$
$\perp \sqsubseteq d \ \ \forall d \in D$

Induktsiooniga n järgi saab näidata, et
$f^{n} \perp \sqsubseteq f^{n}\, d$ iga $d \in D$ korral.

Järeldub, et $f^{n} \perp \sqsubseteq f^{m} \perp$, kui $n \leq m$.

Seega $\{f^{n} \perp \mid n \geq 0\}$ on D ahel ja püsipunkt $FIX\, f$ eksisteerib, kuna D on täielik osaliselt järjestatud hulk.

Näitame, et $FIX\, f$ on püsipunkt ($f\,(FIX\, f) = FIX\, f$).

$$f\,(FIX\, f) = f\,(\sqcup\{\, f^{\,n} \perp \mid n \geq 0\}\,) =$$

$$= \sqcup\{\, f\,(f^{\,n} \perp) \mid n \geq 0\} =$$

$$= \sqcup\{\, f^{\,n} \perp \mid n \geq 1\} =$$

$$= \sqcup(\{\, f^{\,n} \perp \mid n \geq 1\} \cup \{\perp\}) =$$

$$= \sqcup\{\, f^{\,n} \perp \mid n \geq 0\} =$$

$$= FIX\, f$$

Näitame, et *FIX* f on vähim püsipunkt.
Oletame, et d on mõni teine püsipunkt, siis $\bot \sqsubseteq d$.

Monotoonsuse tõttu kehtib
$f^n \bot \sqsubseteq f^n d$ iga $n \geq 0$ jaoks.

Kuna d on püsipunkt, siis kehtib
$f^n \bot \sqsubseteq d$ iga $n \geq 0$ jaoks.

Seega d on ahela $\{f^n \bot \mid n \geq 0\}$ ülemtõke ja kuna *FIX* f on ülemraja, siis *FIX* $f \sqsubseteq d$.

Näide

Funktsiooni vähima püsipunkti leidmine.

Olgu funktsioon F' defineeritud järgmiselt:

$$(F'\, g)\, s = \begin{cases} g\, s, \text{ kui } s\, x \neq 0 \\ s, \text{ kui } s\, x = 0 \end{cases}$$

$State \hookrightarrow State$ vähim element $\perp$ on defineeritud:

$\perp s = undef$ iga s jaoks.

Hulga $\{F'^{\,n} \perp \mid n \geq 0\}$ elemendid avalduvad:

$$(F'^{\,0} \perp)\, s = (id \perp)\, s = undef$$

$$(F'^{\,1}\perp)\,s = (F'\perp)\,s = \begin{cases} \perp s, \text{ kui } s\,x \neq 0 \\ s, \text{ kui } s\,x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathit{undef}, \text{ kui } s\,x \neq 0 \\ s, \text{ kui } s\,x = 0 \end{cases}$$

$$(F'^{\,2}\perp)\,s = F'\,(F'^{\,1}\perp)\,s = \begin{cases} (F'^{\,1}\perp)\,s, \text{ kui } s\,x \neq 0 \\ s, \text{ kui } s\,x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathit{undef}, \text{ kui } s\,x \neq 0 \\ s, \text{ kui } s\,x = 0 \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$F'^{\,n} \perp = F'^{\,n+1} \perp \text{ iga } n > 0 \text{ korral.}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqcup\{F'^{\,n} \perp \mid n \geq 0\} = \sqcup\{F'^{\,0} \perp, F'^{\,1} \perp\} = F'^{\,1} \perp$$

sest $F'^{\,0} \perp = \perp$

Seega funktsiooni F' vähim püsipunkt on:

$$\mathrm{g}_1\ \mathrm{s} = \begin{cases} \mathit{undef}, \text{ kui } s\ x \neq 0 \\ s, \text{ kui } s\ x = 0 \end{cases}$$