

Rekursiooni semantika

Aivar Annamaa

Programmeerimiskeelte semantika, kevad 2009

Keel REC

- $t ::= n \mid x \mid t_1 + t_2 \mid t_1 - t_2 \mid t_1 * t_2$
| **if** t_0 **then** t_1 **else** t_2
| $f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$
- arvud: $n \in \mathbf{N}$
- arvu muutujad: $x \in \mathbf{Var}$
- funktsioonmuutujad: $f_1, \dots, f_k \in \mathbf{Fvar}$
- 0 = tõene

Deklaratsioon

- Funktsioonimuutujatele annab tähendused *deklaratsioon* e. võrduste jada:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_{a1}) &= t_1 \\ &\vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_{ak}) &= t_k \end{aligned}$$

- Parem pool võib sisaldada arvmuutujaid argumentide seast ja funktsioonimuutujaid deklaratsioonist

Ülesanne 9.1

- Mida arvutab funktsioon s järgnevas deklaratsioonis?

$$s(x) = \mathbf{if\ } x \mathbf{\ then\ } 0 \mathbf{\ else\ } f(x, 0 - x)$$

$$f(x, y) = \mathbf{if\ } x \mathbf{\ then\ } 1 \mathbf{\ else\ } (\mathbf{if\ } y \mathbf{\ then\ } -1 \mathbf{\ else\ } f(x - 1, y - 1))$$

- NB! 0 = tõene

Väärtus- vs. nimiparameetrid

- Olgu meil deklaratsioon:

$$f_1(x) = f_1(x) + 1$$

$$f_2(x) = 1$$

- Mis on termi $f_2(f_1(3))$ väärtuseks?
- Väärtusparameetrid, *call-by-value*
- Nimiparameetrid, *call-by-name*

Loengu plaan

- Operatsioonsemantika
 - Väärtusparameetrite puhul
 - Nimiparameetrite puhul
 - Esitus Prologis
- Denotatsioonsemantika
 - Väärtusparameetrite puhul
 - Nimiparameetrite puhul
 - Esitus Haskellis
- Semantikate vastavused

Op-sem. väärtusparameetritega

- Olgu meil deklaratsioon d :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_{a_1}) &= d_1 \\ &\vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_{a_k}) &= d_k \end{aligned}$$

- Väärtustusrelatsioon seab suletud termile t vastavusse arvulise väärtuse n arvestades deklaratsiooni d

$$t \rightarrow_{va}^d n$$

Väärtustusrelatsiooni *va* reeglid

$$(num) \quad n \rightarrow_{va}^d n$$

$$(op) \quad \frac{t_1 \rightarrow_{va}^d n_1 \quad t_2 \rightarrow_{va}^d n_2}{t_1 \mathbf{op} t_2 \rightarrow_{va}^d n_1 \mathbf{op} n_2}$$

$$(condt) \quad \frac{t_0 \rightarrow_{va}^d 0 \quad t_1 \rightarrow_{va}^d n_1}{\mathbf{if} t_0 \mathbf{then} t_1 \mathbf{else} t_2 \rightarrow_{va}^d n_1}$$

$$(condf) \quad \frac{t_0 \rightarrow_{va}^d n_0 \quad t_2 \rightarrow_{va}^d n_2 \quad n_0 \neq 0}{\mathbf{if} t_0 \mathbf{then} t_1 \mathbf{else} t_2 \rightarrow_{va}^d n_2}$$

$$(fn) \quad \frac{t_1 \rightarrow_{va}^d n_1 \quad \dots \quad t_{a_i} \rightarrow_{va}^d n_{a_i} \quad d_i[n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \rightarrow_{va}^d n}{f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rightarrow_{va}^d n}$$

Väärtustus on deterministlik

$$t \rightarrow_{va}^d n_1 \wedge t \rightarrow_{va}^d n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

Tõestus: induktsiooniga üle reeglite

Op-sem. nimiparameetritega

$$(num) \quad n \rightarrow_{na}^d n$$

$$(op) \quad \frac{t_1 \rightarrow_{na}^d n_1 \quad t_2 \rightarrow_{na}^d n_2}{t_1 \mathbf{op} t_2 \rightarrow_{na}^d n_1 \mathbf{op} n_2}$$

$$(condt) \quad \frac{t_0 \rightarrow_{na}^d 0 \quad t_1 \rightarrow_{na}^d n_1}{\mathbf{if} t_0 \mathbf{then} t_1 \mathbf{else} t_2 \rightarrow_{na}^d n_1}$$

$$(condf) \quad \frac{t_0 \rightarrow_{na}^d n_0 \quad t_2 \rightarrow_{na}^d n_2 \quad n_0 \neq 0}{\mathbf{if} t_0 \mathbf{then} t_1 \mathbf{else} t_2 \rightarrow_{na}^d n_2}$$

$$(fn) \quad \frac{d_i[t_1/x_1, \dots, t_{a_i}/x_{a_i}] \rightarrow_{na}^d n}{f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rightarrow_{na}^d n}$$

Väärtustusrelatsioon Prologis

$$(op) \quad \frac{t_1 \xrightarrow{d}_{va} n_1 \quad t_2 \xrightarrow{d}_{va} n_2}{t_1 \mathbf{op} t_2 \xrightarrow{d}_{va} n_1 \mathbf{op} n_2}$$

```
va (add (T1, T2), D, N) :-  
    va (T1, D, N1),  
    va (T2, D, N2),  
    N is N1 + N2.
```

Väärtustusrelatsioon Prologis

```
?- op(900, xfx, ==>).
```

```
[add(T1, T2) | D] ==> N :-  
    [T1 | D] ==> N1,  
    [T2 | D] ==> N2,  
    N is N1 + N2.
```

Väärtustusrelatsioon Prologis

`[num(N) | D] ==> N.`

`[ifElse(T0, T1, T2) | D] ==> N1 :-
 [T0 | D] ==> 0,
 [T1 | D] ==> N1.`

`[ifElse(T0, T1, T2) | D] ==> N2 :-
 [T0 | D] ==> N0,
 [T2 | D] ==> N2,
 N0 \= 0.`

`[funApp(I, Ts) | D] ==> N :-
 vaList(Ts, D, Ns),
 nth1(I, D, [Di | Xs]),
 subst(Di, Ns, Xs, SDi),
 [SDi | D] ==> N.`

Väärtustamine Prologis

?- [add(num(2), num(3)) | []] ==> X.

X = 5

Den-sem. väärtusparameetritega

- $\llbracket t \rrbracket_{va} \varphi \rho$ seab termile t ning keskkondadele φ ja ρ vastavusse väärtuse domeenis N_{\perp}

- Arvmuutujate keskkond

$$\rho : \text{Var} \rightarrow N \quad \text{tüübi tähiseks } \mathbf{Env}_{va}$$

- Funktsioonimuutujate keskkond

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \quad \text{tüübi tähiseks } \mathbf{Fenv}_{va}$$

$$\varphi_i : N^{ai} \rightarrow N_{\perp}$$

Tõstmine (*lifting*)

- Kasutatakse lisaelementi \perp ja funktsiooni $\lfloor - \rfloor$

$$D_{\perp} = \{ \lfloor d \rfloor \mid d \in D \} \cup \{ \perp \}$$

Kehtib $\lfloor d_0 \rfloor = \lfloor d_1 \rfloor \Rightarrow d_0 = d_1$
ja $\perp \neq \lfloor d \rfloor$

- Alternatiiv osalistele funktsioonide kasutamisele

$$A \rightarrow A_{\perp} \text{ vs. } A \hookrightarrow A$$

- Osaline järjestus

$$d'_0 \sqsubseteq d'_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d'_0 = \perp \vee (d_0, d_1 \in D \wedge d'_0 = \lfloor d_0 \rfloor \wedge d'_1 = \lfloor d_1 \rfloor \wedge d_0 \sqsubseteq d_1)$$

Termi semantiline funktsioon (*va*)

$$\llbracket n \rrbracket_{va} = \lambda \varphi \lambda \rho. \lfloor n \rfloor$$

$$\llbracket x \rrbracket_{va} = \lambda \varphi \lambda \rho. \lfloor \rho(x) \rfloor$$

$$\llbracket t_1 \mathbf{op} t_2 \rrbracket_{va} = \lambda \varphi \lambda \rho. \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho \mathbf{op} \llbracket t_2 \rrbracket_{va} \varphi \rho$$

$$\llbracket \mathbf{if} t_0 \mathbf{then} t_1 \mathbf{else} t_2 \rrbracket_{va} = \lambda \varphi \lambda \rho.$$

$$\mathit{Cond} (\llbracket t_0 \rrbracket_{va} \varphi \rho, \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho, \llbracket t_2 \rrbracket_{va} \varphi \rho)$$

$$\llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{va} = \lambda \varphi \lambda \rho.$$

$$\mathit{let} v_1 \Leftarrow \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho, \dots, v_{a_i} \Leftarrow \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{va} \varphi \rho.$$

$$\varphi_i(v_1, \dots, v_{a_i})$$

Funktsioonide tõstmine

$$f : D \rightarrow E$$

$$f^* : D_{\perp} \rightarrow E$$

$$f^*(d') = \begin{cases} f(d) & \text{kui } d' = \lfloor d \rfloor \text{ mõne } d \in D \text{ puhul} \\ \perp & \text{muul juhul} \end{cases}$$

- $(\lambda x.e)^*(d')$ \Leftrightarrow $\text{let } x \Leftarrow d'.e$
- alternatiivne tähistus: $(\underline{\lambda}x.e)(d')$
- uus funktsioon on agar (*strict*)
- monotoonsus säilib

Lemma 9.3

- Iga REC keele termi t puhul on semantiline funktsioon $\llbracket t \rrbracket_{va}$ pidev funktsioon tüübiga $(\mathbf{Fenv}_{va} \rightarrow (\mathbf{Env}_{va} \rightarrow \mathbf{N}_{\perp}))$
- St. rohkem defineeritud keskkonnad annavad rohkem defineeritud tulemuse
- St. pole võimalik, et rohkem defineeritud keskkondadega on tulemuseks \perp ja vähem defineeritud keskkondadega $\llbracket n \rrbracket$
- Tõestus: induktsiooniga termi struktuuri järgi

Funktsioonikeskkond ja deklaratsioon

- Funktsioonikeskkond on funktsioonide korteež

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

tüübiga

$$\mathbf{Fenv}_{va} = (N^{a_1} \rightarrow N_{\perp}) \times \dots \times (N^{a_k} \rightarrow N_{\perp})$$

- Keskkond esitatakse deklaratsioonina d , mis on vörduste korteež:

$$d = (f_1(x_1, \dots, x_{a_1}) = d_1, \\ \dots, \\ f_k(x_1, \dots, x_{a_k}) = d_k)$$

Deklaratsioon sem. funktsioon (va)

- Rekursiivselt:

$$\llbracket d \rrbracket_{vaD} = \varphi, \text{ kus}$$

$$\begin{aligned} \varphi = & (\lambda n_1, \dots, n_{a_1} \in \mathbb{N} . \llbracket d_1 \rrbracket_{va} \varphi(\rho[n_1/x_1, \dots, n_{a_1}/x_{a_1}]), \\ & \dots, \\ & \lambda n_1, \dots, n_{a_k} \in \mathbb{N} . \llbracket d_k \rrbracket_{va} \varphi(\rho[n_1/x_1, \dots, n_{a_k}/x_{a_k}])) \end{aligned}$$

- Püsipunkti kaudu:

$$\llbracket d \rrbracket_{vaD} = \mathit{fix}(F), \text{ kus}$$

$$\begin{aligned} F(\varphi) = & (\lambda n_1, \dots, n_{a_1} \in \mathbb{N} . \llbracket d_1 \rrbracket_{va} \varphi(\rho[n_1/x_1, \dots, n_{a_1}/x_{a_1}]), \\ & \dots, \\ & \lambda n_1, \dots, n_{a_k} \in \mathbb{N} . \llbracket d_k \rrbracket_{va} \varphi(\rho[n_1/x_1, \dots, n_{a_k}/x_{a_k}])) \end{aligned}$$

Funktsioonide esitamine

- REC esitab funktsioonid võrdustena
- Võrdusele vastav funktsioon võib sõltuda väärtustamise viisist
 - agar, aplikatiivjärjekord
 - laisk, normaaljärjekord
- Rekursiivset võrdust võivad rahuldada mitu erinevat funktsiooni

$$f(n) = f(n+1)$$

- *fix* kasutamine näitab, et võrdus tähistab sobivatest funktsioonidest vähim defineeritud

Den-sem. nimiparameetritega

- $\llbracket t \rrbracket_{na} \varphi \rho$ seab termile t ning keskkondadele φ ja ρ vastavusse väärtuse domeenis N_{\perp}

- Arvmuutujate keskkond

$$\rho : \text{Var} \rightarrow N_{\perp} \quad \text{tüübi tähiseks } \mathbf{Env}_{na}$$

- Funktsioonimuutujate keskkond

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \quad \text{tüübi tähiseks } \mathbf{Fenv}_{na}$$

$$\varphi_i : N_{\perp}^{ai} \rightarrow N_{\perp}$$

Termi semantiline funktsioon (na)

$$\llbracket n \rrbracket_{na} = \lambda \varphi \lambda \rho . \lfloor n \rfloor$$

$$\llbracket x \rrbracket_{na} = \lambda \varphi \lambda \rho . \rho(x)$$

$$\llbracket t_1 \mathbf{op} t_2 \rrbracket_{na} = \lambda \varphi \lambda \rho . \llbracket t_1 \rrbracket_{na} \varphi \rho \text{ op } \llbracket t_2 \rrbracket_{na} \varphi \rho$$

$$\llbracket \mathbf{if} t_0 \mathbf{then} t_1 \mathbf{else} t_2 \rrbracket_{na} = \lambda \varphi \lambda \rho .$$

$$\text{Cond}(\llbracket t_0 \rrbracket_{na} \varphi \rho, \llbracket t_1 \rrbracket_{na} \varphi \rho, \llbracket t_2 \rrbracket_{na} \varphi \rho)$$

$$\llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{na} = \lambda \varphi \lambda \rho . \varphi_i(\llbracket t_1 \rrbracket_{na} \varphi \rho, \dots, \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{na} \varphi \rho)$$

Deklaratsioon sem. funktsioon (na)

$$\llbracket d \rrbracket_{naD} = \text{fix}(F), \text{ kus}$$

$$F(\varphi) = (\lambda n_1, \dots, n_{a_1} \in N_{\perp} . \llbracket d_1 \rrbracket_{na} \varphi(\rho[n_1/x_1, \dots, n_{a_1}/x_{a_1}]), \\ \dots, \\ \lambda n_1, \dots, n_{a_k} \in N_{\perp} . \llbracket d_k \rrbracket_{na} \varphi(\rho[n_1/x_1, \dots, n_{a_k}/x_{a_k}]))$$

Lemma 9.10

- Semantiline funktsioon na on pidev
- Tõestus: analoogselt lemma 9.3-ga

Näide (*va*)

- Deklaratsioon d :

$$\begin{aligned}f_1 &= f_1 + 1 \\ f_2(x) &= 1\end{aligned}$$

- Term t :

$$f_2(f_1)$$

- Funktsioonikeskkond φ :

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in N_{\perp} \times (N \rightarrow N_{\perp})$$

- Rakendame deklaratsiooni sem. funktsiooni

$$\varphi = \llbracket d \rrbracket_{vaD}$$

Op. ja den. semantilate samaväärsus

Tõestame samaväärsuse:

- ▶ väärtusparameetrite (*va*) puhul
 - ▶ $Op \implies Den$, lihtne
 - ▶ $Den \implies Op$, keerulisem
- ▶ nimiparameetrite (*na*) puhul
 - ▶ $Op \implies Den$, lihtne
 - ▶ $Den \implies Op$, kõige keerulisem

Teoreem 9.8 (Op \iff Den)_{va}

Olgu

- ▶ t suvaline kinnine term
- ▶ d deklaratsioon
- ▶ k deklaratsiooni d elementide arv
- ▶ $n \in \mathbf{N}$
- ▶ $\rho \in \mathbf{Env}_{va}$ (suvaline, vt. Lemma 9.4)
- ▶ $\delta \in \mathbf{Fenv}_{va} = \llbracket d \rrbracket_{vaD}$

Siis

$$t \rightarrow_{va}^d n \iff \llbracket t \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

Tõestus:

(\implies) Lemma 9.6

(\impliedby) Lemma 9.7

Abilemmad_{va}

- ▶ **Lemma 9.3** Iga **REC** termi t puhul on denotatsioon $\llbracket t \rrbracket_{va}$ pidev funktsioon tüübiga $(\mathbf{Fenv}_{va} \rightarrow (\mathbf{Env}_{va} \rightarrow \mathbf{N}_\perp))$
- ▶ **Lemma 9.4** (Keskkond vs. termis esinevad muutujad)
Iga termi t puhul, kui keskkonnad $\rho, \rho' \in \mathbf{Env}_{va}$ annavad sama tulemuse kõigi t -s esinevate muutujate kohta, siis iga $\varphi \in \mathbf{Fenv}_{va}$ korral

$$\llbracket t \rrbracket_{va} \varphi \rho = \llbracket t \rrbracket_{va} \varphi \rho'$$

- ▶ **Lemma 9.5** (Substitutsioonilemma nr. 1)
Olgu t term, ning $n \in \mathbf{N}$, siis

$$\llbracket t \rrbracket_{va} \varphi \rho[n/x] = \llbracket t[n/x] \rrbracket_{va} \varphi \rho$$

Tõestused induktsiooniga üle termi struktuuri

Lemma 9.6 $(Op \implies Den)_{va}$

Vaja tõestada:

$$t \rightarrow_{va}^d n \implies \llbracket t \rrbracket_{va} \delta\rho = \lfloor n \rfloor$$

Tõestus: induktiivselt üle termi t struktuuri, kasutades abipredikaati P

$$P(t, n) \iff \llbracket t \rrbracket_{va} \delta\rho = \lfloor n \rfloor$$

- ▶ tõestame väite (op) reegli puhul
- ▶ tõestame väite (fn) reegli puhul
- ▶ muul juhul triviaalne või analoogne

Lemma 9.6 $(Op \implies Den)_{va}$, (op) reegel

$$(op) \frac{t_1 \rightarrow_{va}^d n_1 \quad t_2 \rightarrow_{va}^d n_2}{t_1 \mathbf{op} t_2 \rightarrow_{va}^d n_1 \mathit{op} n_2}$$

Sellise järeldusega on vaid üks reegel, seega reegli eeldused kehtivad

$$t_1 \rightarrow_{va}^d n_1 \quad \text{ja} \quad t_2 \rightarrow_{va}^d n_2$$

ind. põhjal kehtib reegli eeldustel ka predikaat P , seega saab väita

$$\llbracket t_1 \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n_1 \rfloor \quad \text{ja} \quad \llbracket t_2 \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n_2 \rfloor$$

järelikult

$$\begin{aligned} \llbracket t_1 \mathbf{op} t_2 \rrbracket_{va} \delta \rho &= \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \delta \rho \mathit{op}_\perp \llbracket t_2 \rrbracket_{va} \delta \rho && \text{def. järgi} \\ &= \lfloor n_1 \rfloor \mathit{op}_\perp \lfloor n_2 \rfloor && \text{ind. eelduste järgi} \\ &= \lfloor n_1 \mathit{op} n_2 \rfloor && \mathit{op}_\perp \text{ def. järgi} \end{aligned}$$

Lemma 9.6 (Op \implies Den)_{va}, (fn) reegel

$$(fn) \frac{t_1 \xrightarrow{d}_{va} n_1 \quad \dots \quad t_{a_i} \xrightarrow{d}_{va} n_{a_i} \quad d_i[n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \xrightarrow{d}_{va} n}{f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \xrightarrow{d}_{va} n}$$

Induktsiooni põhjal kehtib P reegli (op) eeldustel, seega

$$\llbracket t_1 \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n_1 \rfloor \quad \wedge \quad \dots \quad \wedge \quad \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n_{a_i} \rfloor$$

$$\wedge \quad \llbracket d_i[n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

järelikult

$$\llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{va} \delta \rho$$

$$= \text{let } v_1 \Leftarrow \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \delta \rho, \dots, v_{a_i} \Leftarrow \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{va} \delta \rho. \delta_i(v_1, \dots, v_{a_i})$$

$$= \delta_i(n_1, \dots, n_{a_i})$$

$$= \llbracket d_i \rrbracket_{va} \delta \rho [n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \quad \delta \text{ def. järgi}$$

$$= \llbracket d_i[n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \rrbracket_{va} \delta \rho \quad \text{subst. lemma järgi}$$

$$= \lfloor n \rfloor \quad \text{eelduse järgi.}$$

Lemma 9.6 $(Op \implies Den)_{va}$, kokkuvõte

Kuna predikaat P kehtib termi kõigi erikujude puhul, siis

$$t \rightarrow_{va}^d n \implies \llbracket t \rrbracket_{va} \delta\rho = \llbracket n \rrbracket$$

□

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}

Vaja tõestada:

$$\llbracket t \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n \rfloor \implies t \rightarrow_{va}^d n$$

Tõestus:

- ▶ toome sisse muudetud väite (1), kus
 - ▶ kasutame δ asemel op.sem vahenditega defineeritud funktsioonikeskkonda φ
 - ▶ ρ -le ja t -le rakendame substituutsiooni
- ▶ väite (1) tõestame induktsiooniga üle t struktuuri
 - ▶ tõestame $t \equiv (t_1 \mathbf{op} t_2)$ puhul
 - ▶ tõestame $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$ puhul
 - ▶ muudel juhtudel triviaalne või analoogne
- ▶ näitame, et väitest (1) saab tuletada esialgse väite
 - ▶ näitame et, $\delta \sqsubseteq \varphi$
 - ▶ 0 muutujaga substituutsioon annab esialgse väite kuju

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}, väide (1)

Toome sisse modifitseeritud väite

$$\llbracket t \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] = \lfloor n \rfloor \implies t[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \xrightarrow{d}_{va} n \quad (1)$$

kus $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ on op. semantika abil defineeritud funktsioonikeskkond, kus $i = 1, \dots, k$ puhul

$$\varphi_i(n_1, \dots, n_{a_i}) = \begin{cases} \lfloor n \rfloor & \text{kui } d_i[n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \xrightarrow{d}_{va} n, \\ \perp & \text{muul juhul} \end{cases}$$

(meenutuseks: δ saadi deklaratatsioonist d den. sem. vahenditega)

Substitutsiooni juures eeldame, et jada x_1, \dots, x_l sisaldab kõiki t -s esinevad muutujaid.

Tõestame väite (1) induktsiooniga üle termi t struktuuri.

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}, $t \equiv (t_1 \text{ op } t_2)$

Eeldame, et

$$\llbracket t_1 \text{ op } t_2 \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] = \lfloor n \rfloor$$

Sel juhul $n = m_1 \text{ op } m_2$, kus

$$\llbracket t_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] = \lfloor m_1 \rfloor$$

$$\llbracket t_2 \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] = \lfloor m_2 \rfloor$$

Induktsiooni põhjal

$$t_1[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \xrightarrow{d}_{va} m_1$$

$$t_2[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \xrightarrow{d}_{va} m_2$$

järelikult

$$(t_1 \text{ op } t_2)[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \xrightarrow{d}_{va} m_1 \text{ op } m_2 = n$$

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}, $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$

Eeldame, et $\llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] = \lfloor n \rfloor$

Den. sem funktsiooni def. järgi

$$\begin{aligned} & (\text{let } v_1 \Leftarrow \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l], \dots, \\ & \quad v_{a_i} \Leftarrow \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l]. \varphi(v_1, \dots, v_{a_i})) = \lfloor n \rfloor \end{aligned}$$

Sel juhul peavad leiduma $m_1, \dots, m_{a_i} \in \mathbf{N}$ nii, et

$$\begin{aligned} \llbracket t_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] &= \lfloor m_1 \rfloor \\ &\vdots \\ \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] &= \lfloor m_{a_i} \rfloor \end{aligned}$$

kusjuures

$$\varphi_i(m_1, \dots, m_{a_i}) = \lfloor n \rfloor$$

jät kub ...

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}, $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$

Induktsiooni järgi

$$t_1[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \rightarrow_{va}^d m_1$$

\vdots

$$t_{a_i}[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \rightarrow_{va}^d m_{a_i}$$

keskkonna φ definitsiooni järgi

$$\varphi_i(m_1, \dots, m_{a_i}) = \lfloor n \rfloor \iff d_i[m_i/x_1, \dots, m_{a_i}/x_{a_i}] \rightarrow_{va}^d n$$

Nüüd on olemas kõik (op) reegli eeldused ja saame järeldada

$$f_i(t_1, \dots, t_{a_i})[n_1/x_1, \dots, n_l/x_l] \rightarrow_{va}^d n$$

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}, $\delta \sqsubseteq \varphi$

Näitame, et väide (1) kehtib kõigi termide kohta. Väidet saab kasutada näitamaks, et $i = 1, \dots, k$ ja iga $n, n_1, \dots, n_{a_i} \in \mathbf{N}$ puhul

$$\llbracket d_i \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] = \lfloor n \rfloor \implies d_i [n_1/x_1, \dots, n_{a_i}/x_{a_i}] \xrightarrow{d_{va}} n$$

järelikult, φ definitsiooni järgi

$$\lambda n_1, \dots, n_{a_1} \in \mathbf{N}. \llbracket d_1 \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_{a_1}/x_{a_1}] \sqsubseteq \varphi_1$$

\vdots

$$\lambda n_1, \dots, n_{a_k} \in \mathbf{N}. \llbracket d_k \rrbracket_{va} \varphi \rho [n_1/x_1, \dots, n_{a_k}/x_{a_k}] \sqsubseteq \varphi_k.$$

seega on φ F eelpüsipunktiks (prefixed point) ning $\delta \sqsubseteq \varphi$.

Lemma 9.7 (Den \implies Op)_{va}, kokkuvõte

Kui eeldame, et term t on kinnine, siis

$$\llbracket t \rrbracket_{va}^{\delta\rho} = \lfloor n \rfloor$$

$$\implies \llbracket t \rrbracket_{va}^{\varphi\rho} = \lfloor n \rfloor \quad \text{Lemma 9.3 järgi on } \llbracket t \rrbracket_{va} \text{ monotoonne}$$

$$\implies t \rightarrow_{va}^d n \quad \text{väite (1) erijuht 0 muutujaga}$$

□

Teoreem 9.8 $(Op \iff Den)_{va}$, kokkuvõte

Kombineerides lemmad 9.6 ja 9.7 saame

$$t \xrightarrow{d}_{va} n \iff \llbracket t \rrbracket_{va} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$



Teoreem 9.15 (Op \iff Den)_{na}

Olgu

- ▶ t suvaline kinnine term
- ▶ d deklaratsioon
- ▶ k deklaratsiooni d elementide arv
- ▶ $n \in \mathbf{N}$
- ▶ $\rho \in \mathbf{Env}_{na}$
- ▶ $\delta \in \mathbf{Fenv}_{na} = \llbracket d \rrbracket_{naD}$

Siis

$$t \rightarrow_{na}^d n \iff \llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

Tõestus:

(\implies) Lemma 9.13

(\impliedby) Lemma 9.14

Abilemmad_{na}

- ▶ **Lemma 9.10** Iga **REC** termi t puhul on denotatsioon $\llbracket t \rrbracket_{na}$ pidev funktsioon tüübiga $(\mathbf{Fenv}_{na} \rightarrow (\mathbf{Env}_{na} \rightarrow \mathbf{N}_\perp))$
- ▶ **Lemma 9.11** (Keskkond vs. termis esinevad muutujad)
Iga termi t puhul, kui keskkonnad $\rho, \rho' \in \mathbf{Env}_{na}$ annavad sama tulemuse kõigi t -s esinevate muutujate kohta, siis iga $\varphi \in \mathbf{Fenv}_{na}$ korral

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \varphi \rho = \llbracket t \rrbracket_{na} \varphi \rho'$$

- ▶ **Lemma 9.12** (Substitutsioonilemma nr. 2)
Olgu t, t' termid, $\varphi \in \mathbf{Fenv}_{na}, \rho \in \mathbf{Env}_{na}$, siis

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \varphi \rho [\llbracket t' \rrbracket_{na} \varphi \rho / x] = \llbracket t[t'/x] \rrbracket_{na} \varphi \rho$$

Tõestused induktsiooniga üle termi struktuuri

Lemma 9.13 ($\text{Op} \implies \text{Den}$)_{na}

Vaja tõestada:

$$t \rightarrow_{na}^d n \implies \llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

Tõestus: induktiivselt üle termi t struktuuri, kasutades abipredikaati P

$$P(t, n) \Leftrightarrow_{\text{def}} \llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

- ▶ tõestame väite (fn) reegli puhul
- ▶ muul juhul triviaalne või analoogne eelnevaga

Lemma 9.13 (Op \implies Den)_{na}, (fn) reegel

$$\frac{d_i[t_1/x_1, \dots, t_{a_i}/x_{a_i}] \rightarrow_{na}^d n}{f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rightarrow_{na}^d n}$$

Induktsiooni järgi

$$\llbracket d_i[t_1/x_1, \dots, t_{a_i}/x_{a_i}] \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

Tuletame

$$\begin{aligned} & \llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{na} \delta \rho \\ &= \delta_i(\llbracket t_1 \rrbracket_{na} \delta \rho, \dots, \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{na} \delta \rho) && \text{sem. fun. def. järgi} \\ &= \llbracket d_i \rrbracket_{na} \delta \rho [\llbracket t_1 \rrbracket_{na} \delta \rho / x_1, \dots, \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{na} \delta \rho / x_{a_i}] && \delta \text{ def. järgi} \\ &= \llbracket d_i[t_1/x_1, \dots, t_{a_i}/x_{a_i}] \rrbracket_{na} \delta \rho && \text{subst. lemma nr. 2 järgi} \\ &= \lfloor n \rfloor \end{aligned}$$

Lemma 9.13 ($Op \implies Den$)_{na}, kokkuvõte

Kuna predikaat P kehtib termi kõigi erikujude puhul, siis

$$t \rightarrow_{na}^d n \implies \llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor$$

□

Püsipunkti lähendused

Järgnevas kasutame induktsiooni üle püsipunkti lähenduste.
Meenutuseks

$$\delta = \text{fix}(F) \quad \text{st.} \quad \delta = \bigsqcup_{r \in \omega} F^r(\perp)$$

kus

$$F(\varphi) = (\lambda z_1, \dots, z_{a_1} \in \mathbf{N}_\perp. \llbracket d_1 \rrbracket_{na} \varphi \rho[z_1/x_1, \dots, z_{a_1}/x_{a_1}], \dots, \\ \lambda z_1, \dots, z_{a_k} \in \mathbf{N}_\perp. \llbracket d_k \rrbracket_{na} \varphi \rho[z_1/x_1, \dots, z_{a_k}/x_{a_k}]).$$

r astme lähenduse kohta kirjutame: $\delta^{(r)} = F^r(\perp)$

$$\delta_i^{(0)}(z_1, \dots, z_{a_i}) = \perp, \quad \text{kui } r > 0 \text{ siis } \delta_i^{(r)} = F(\delta^{(r-1)})$$

seega $i = 1, \dots, k$ puhul

$$\delta_i^{(r)}(z_1, \dots, z_{a_i}) = \llbracket d_i \rrbracket_{na} \delta^{(r-1)} \rho[z_1/x_1, \dots, z_{a_i}/x_{a_i}]$$

Lemma 9.14 (Den \implies Op)_{na}

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor \implies t \rightarrow_{na}^d n$$

Tõestus:

- ▶ toome sisse (üldisema) väite (1) kus
 - ▶ δ asemel kasutame lähendust
 - ▶ ρ -le ja t -le rakendame substituutsiooni
- ▶ väite (1) tõestamiseks kasutame mat. induktsiooni üle lähenduste
 - ▶ baasjuhtumil induktsioon üle termi struktuuri
 - ▶ induktsiooni sammul induktsioon üle termi struktuuri
 - ▶ põhitöö $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$ puhul
- ▶ näitame, et väitest (1) saab tuletada esialgse väite
 - ▶ näitame, et δ lähendus sobib
 - ▶ näitame, et substituutsioon sobib

Lemma 9.14 (Den \implies Op)_{na}, väide (1)

Toome sisse muudetud väite: Kõigil termide t , arvude n , kinniste termide u_1, \dots, u_s ja muutujate y_1, \dots, y_s puhul kehtib

$$\begin{aligned} \llbracket t \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho[\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s] &= \lfloor n \rfloor \\ \implies t[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s] &\rightarrow_{na}^d n \quad (1) \end{aligned}$$

Väitega (1) samaväärne väide on

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho[\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s] \sqsubseteq \text{res}(t[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s])$$

Abifunktsioon res annab termi op-sem väärtuse tüübis \mathbf{N}_\perp

$$\text{res}(t) = \begin{cases} \lfloor n \rfloor & \text{kui } t \rightarrow_{na}^d n, \\ \perp & \text{muul juhul} \end{cases}$$

Eeldame, et muutujate hulgas sisalduvad kõik termi t muutujad. Tõestame väite (1) mat. induktsiooniga üle $r \in \omega$

Lemma 9.14 (Den \implies Op)_{na}, mat. ind baas

$r = 0$ puhul peame näitama

$$\begin{aligned} \llbracket t \rrbracket_{na} \perp \rho[\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s] &= \llbracket n \rrbracket \\ \implies t[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s] &\xrightarrow{d}_{na} n \end{aligned}$$

Tõestus: induktsioon üle termi t struktuuri

- ▶ kui t on muutuja, siis on ta eelduse kohaselt üks muutjatest y_1, \dots, y_s
- ▶ kui $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$ siis on implikatsiooni eeldus alati väär
- ▶ muudel juhtudel sama lihtne.

Lemma 9.14 (Den \implies Op)_{na}, mat. ind. samm

Oletame et $r > 0$ ja (1) kehtib $(r - 1)$ puhul. Peame näitama

$$\begin{aligned} \llbracket t \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho[\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s] &= \lfloor n \rfloor \\ \implies t[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s] &\xrightarrow{d}_{na} n \end{aligned}$$

Kasutame jälle induktsiooni üle t struktuuri. Baasist erinevalt on tarvis käsitleda juhtu, kus $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$

Lemma 9.14 (Den \implies Op) $_{na}$, samm, $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$

Olgu $\rho' = \rho[\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s]$

$$\begin{aligned} & \llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho' \\ &= \delta_i^{(r)} (\llbracket t_1 \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho', \dots, \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho') \quad \text{sem. fun. def. järgi} \\ &= \llbracket d_i \rrbracket_{na} \delta^{(r-1)} \rho' [\llbracket t_1 \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho' / x_1, \dots, \llbracket t_{a_i} \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho' / x_{a_i}] \quad \delta^{(r)} \text{ def järgi} \end{aligned}$$

Iga $t_j, 1 \leq j \leq a_i$ kohta saame väita

$$\begin{aligned} \llbracket t_j \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho' &= \llbracket t_j \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho[\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s] \\ &\sqsubseteq \text{res}(t_j[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s]) \end{aligned}$$

kasutades ρ' definitsiooni ning
struktu. ind. põhjal väite (1) alternatiivset esitust

Lemma 9.14 (Den \implies Op) $_{na}$, samm, $t \equiv f_i(t_1, \dots, t_{a_i})$

Lemma 9.10 põhjal on $\llbracket d_i \rrbracket_{na}$ monotoonne, seega

$$\llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho' \sqsubseteq \llbracket d_i \rrbracket_{na} \delta^{(r-1)} \rho' [\text{res}(t'_1)/x_1, \dots, \text{res}(t'_s)/x_s]$$

kus t'_j tähistab $t_j[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s]$, iga $1 \leq j \leq a_i$ jaoks

Mat. induktsiooni järgi saame väita $(r - 1)$ kohta:

$$\llbracket d_i \rrbracket_{na} \delta^{(r-1)} \rho' [\text{res}(t'_1)/x_1, \dots, \text{res}(t'_{a_i})/x_{a_i}] \sqsubseteq \text{res}(d_i[t'_1/x_1, \dots, t'_{a_i}/x_{a_i}])$$

Lemma 9.14 (Den \implies Op)_{na}, mat. ind. samm

Op. semantika (fn) reegli järgi

$$\text{res}(f_i(t'_1, \dots, t'_{a_i})) = \text{res}(d_i[t'_1/x_1, \dots, t'_{a_i}/x_{a_i}]).$$

Järelikult (\sqsubseteq transitiiivsus + subst. lemma nr. 2)

$$\begin{aligned} \llbracket f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho [\text{res}(u_1)/y_1, \dots, \text{res}(u_s)/y_s] \\ \sqsubseteq \text{res}(f_i(t_1, \dots, t_{a_i})[u_1/y_1, \dots, u_s/y_s]) \end{aligned}$$

see tõestab väite (1), seega

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho = \lfloor n \rfloor \implies t \rightarrow_{na}^d n$$

iga $r \in \omega$ puhul

Lemma 9.14 (Den \implies Op) $_{na}$ $\delta^{(r)} \rightarrow \delta$

Lemma 9.10 näitas, et semantiline funktsioon on pidev, järelikult

$$\begin{aligned} \llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho &= \llbracket t \rrbracket_{na} \left(\bigsqcup_r \delta^{(r)} \right) \rho \\ &= \bigsqcup_r \llbracket t \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho \end{aligned}$$

seega mingi $r \in \omega$ puhul

$$\begin{aligned} \llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor &\implies \llbracket t \rrbracket_{na} \delta^{(r)} \rho \\ &\implies t \rightarrow_{na}^d n \quad \text{väite (1) põhjal} \end{aligned}$$

seega

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor \implies t \rightarrow_{na}^d n$$

□

Teoreem 9.15 ($\text{Den}_{na} \iff \text{Op}_{na}$)

Kombineerides lemmad 9.13 ning 9.14 saame väita

$$\llbracket t \rrbracket_{na} \delta \rho = \lfloor n \rfloor \iff t \rightarrow_{na}^d n$$



Kasutatud materjalid

- ▶ G. Winskel, “The Formal Semantics of Programming Languages”
- ▶ http://en.wikibooks.org/wiki/Haskell/Denotational_semantics
- ▶ D. A. Schmidt, “Denotational Semantics. A Methodology for Language Development ”