Galois‘ ühendused ja Cousot‘ hierarhia

Jaak Randmets

28. mai 2009. a.

Ülevaade

1. Galois‘ ühendused
    - Definitsioon
    - Näide
    - Adjunktsioonid
    - Omadusi
    - Galois‘ ühenduste konstrueerimine
    - Püsipunkti ülekanded

2. Cousot‘ hierarhia

Galois' ühendused

Definitsioon

Me ütleme, et nelik (L, α, γ, M) on *Galois' ühendus* täielike võrede $(L, \sqsubseteq)$ ja $(M, \sqsubseteq)$ vahel parajasti siis kui monotoonsed funktsioonid $\alpha : L \rightarrow M$ ja $\gamma : M \rightarrow L$ rahuldavad tingimusi:

$$\gamma(\alpha(l)) \sqsupseteq l, \ \forall l \in L \tag{1}$$

$$\alpha(\gamma(m)) \sqsubseteq m, \ \forall m \in M \tag{2}$$

Võresid L ja M kutsutakse vastavalt konkreetseks ja abstraktseks domeeniks, funktsioone α ning γ vastavalt abstraktsiooni- ja konkretisatsioonifunktsiooniks.

Intervallide domeen

Definitsioon – laiendatud täisarvude domeen

Lisame täisarvude hulgale positiivse ning negatiivse lõpmatuse:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Järjestus on defineeritud loomulikul viisil. Peale selle defineerime abifunktsioonid:

$$\inf'(Z) = \begin{cases} \infty & \text{kui } Z = \emptyset \\ z' & \text{kui } z' \text{ on vähim } Z \text{ element} \\ -\infty & \text{vastasel juhul} \end{cases}$$

$$\sup'(Z) = \begin{cases} -\infty & \text{kui } Z = \emptyset \\ z' & \text{kui } z' \text{ on suurim } Z \text{ element} \\ \infty & \text{vastasel juhul} \end{cases}$$

Intervallide domeen

Definitsioon – intervallide domeen

Defineerime hulga:

$$\textbf{Interval} = \{\bot\} \cup \{\, [z_1, z_2] \,|\, z_1 \leq z_2,\ z_1 \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}\,,\ z_2 \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}\}$$

Järjestuse defineerimiseks vajame abifunksioone:

$$\inf(int) = \begin{cases} \infty & \text{kui } int = \bot \\ z_1 & \text{kui } int = [z_1, z_2] \end{cases}$$

$$\sup(int) = \begin{cases} -\infty & \text{kui } int = \bot \\ z_2 & \text{kui } int = [z_1, z_2] \end{cases}$$

Mida kasutades:

$$int_1 \sqsubseteq int_2 \ \rightleftharpoons\ \inf(int_2) \leq \inf(int_1) \wedge \sup(int_1) \leq \sup(int_2)$$

Intervallide domeen

Väide

$(\textbf{Interval}, \sqsubseteq)$ *on täielik võre.*

Tõestus.

Piisab kui näitame, et iga **Interval** alamhulk omab ülemist raja (**Lemma A.2**). Olgu $Y \subseteq \textbf{Interval}$, saab näidata, et:

$$\bigsqcup Y = \begin{cases} \bot & \text{kui } Y \subseteq \{\bot\} \\ [\inf'\{\inf(int) \mid int \in Y\}, \\ \sup'\{\sup(int) \mid int \in Y\}] & \text{vastasel juhul} \end{cases}$$

$\square$

Intervallide domeen

Näide

Olgu $(\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \subseteq)$ täisarvude alamhulkade täielik võre. Konstrueerime Galois‘ ühenduse:

$$(\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \alpha_{ZI}, \gamma_{ZI}, \mathbf{Interval})$$

võrede $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$ ja **Interval** vahel.
Defineerime konkretisatsioonifunktsiooni $\gamma_{ZI} : \mathbf{Interval} \to \mathcal{P}(\mathbf{Z})$ kui:

$$\gamma_{ZI}(int) = \{\, z \in \mathbf{Z} \mid \inf(int) \leq z \leq \sup(int)\}$$

ning abstraktsioonifunktsiooni $\alpha_{ZI} : \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \to \mathbf{Interval}$ kui:

$$\alpha_{ZI}(Z) = \begin{cases} \bot & \text{kui } Z = \emptyset \\ [\inf'(Z), \sup'(Z)] & \text{vastasel juhul} \end{cases}$$

Intervallide domeen

Väide

$(\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \alpha_{ZI}, \gamma_{ZI}, \textbf{Interval})$ *on Galois' ühendus.*

Tõestus.

Abstraktsiooni ja konkretisatsioonifunktsioonid on monotoonsed:

- Olgu $Z_1 \subseteq Z_2$. Kui $Z_1 = \emptyset$ või $Z_2 = \emptyset$ siis on väide ilmne. Seega $\alpha_{ZI}(Z_1) = [a, b]$ ning $\alpha_{ZI}(Z_2) = [a', b']$ millest saame, et $a' \leq a$ ning $b \leq b'$ mida oligi tarvis näidata.
- Olgu $int_1 \sqsubseteq int_2$. Kui $int_1 = \bot$ või $int_2 = \bot$ siis on väide ilmne. Seega $int_1 = [a, b]$ ja $int_2 = [a', b']$ millest saame, et $\gamma_{ZI}(int_1) \subseteq \gamma_{ZI}(int_2)$.

$\square$

Intervallide domeen

Väide

$(\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \alpha_{ZI}, \gamma_{ZI}, \mathbf{Interval})$ *on Galois‘ ühendus.*

Tingimus (1).

Kui $Z \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ZI}(\alpha_{ZI}(Z)) &= \gamma_{ZI}\big(\big[\mathrm{inf}'(Z), \mathrm{sup}'(Z)\big]\big) \\
&= \big\{ z \in \mathbf{Z} \mid \mathrm{inf}'(Z) \leq z \leq \mathrm{sup}'(Z) \big\} \\
&\supseteq Z
\end{aligned}$$

Kui $Z = \emptyset$:

$$\gamma_{ZI}(\alpha_{ZI}(\emptyset)) = \gamma_{ZI}(\bot) = \emptyset$$

$\square$

Intervallide domeen

Väide

$(\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \alpha_{ZI}, \gamma_{ZI}, \mathbf{Interval})$ *on Galois' ühendus.*

Tingimus (2).

Kui $int = [z_1, z_2]$:

$$\begin{aligned}\alpha_{ZI}(\gamma_{ZI}([z_1, z_2])) &= \alpha_{ZI}(\{\, z \in \mathbf{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2 \,\}) \\ &= [z_1, z_2]\end{aligned}$$

Kui $int = \bot$:

$$\alpha_{ZI}(\gamma_{ZI}(\bot)) = \alpha_{ZI}(\emptyset) = \bot$$

$\square$

Adjunktsioonid

Definitsioon

Ütleme, et (L, α, γ, M) on *adjunktsioon* täielike võrede $(L, \sqsubseteq)$ ja $(M, \sqsubseteq)$ vahel, kui täielikud funktsioonid $\alpha : L \to M$ ja $\gamma : M \to L$ rahuldavad tingimust:

$$\alpha(l) \sqsubseteq m \;\Leftrightarrow\; l \sqsubseteq \gamma(m) \qquad (3)$$

kõikide $l \in L$ ja $m \in M$ korral.

Adjunktsioonid $\equiv$ Galois‘ ühendused

Väide

(L, α, γ, M) on adjunktsioon parajasti siis kui (L, α, γ, M) on Galois‘ ühendus.

Galois‘ ühendus $\Rightarrow$ adjunktsioon.

Olgu (L, α, γ, M) Galois‘ ühendus.
Eeldame, et $\alpha(l) \sqsubseteq m$. Kuna γ on monotoonne saame, et $\gamma(\alpha(l)) \sqsubseteq \gamma(m)$. Teame, et $\gamma(\alpha(l)) \sqsupseteq l$ mis on samaväärne väitega $l \sqsubseteq \gamma(\alpha(l))$ millest:

$$l \sqsubseteq \gamma(\alpha(l)) \sqsubseteq \gamma(m)$$

Oleme näidanud, et $\alpha(l) \sqsubseteq m \Rightarrow l \sqsubseteq \gamma(m)$. Teistpidi näitamine käib analoogiliselt. $\square$

Adjunktsioonid $\equiv$ Galois‘ ühendused

Väide

(L, α, γ, M) on adjunktsioon parajasti siis kui (L, α, γ, M) on Galois‘ ühendus.

Adjunktsioon $\Rightarrow$ Galois‘ ühendus.

Olgu (L, α, γ, M) adjunktsioon.
Valime $l \in L$ suvaliselt. Teame, et $\alpha(l) \sqsubseteq \alpha(l)$. Kasutades eeldust $\alpha(l) \sqsubseteq m \Leftrightarrow l \sqsubseteq \gamma(m)$ saame $l \sqsubseteq \gamma(\alpha(l))$, mida oligi vaja näidata.
Analoogiliselt saame näidata, et $\alpha(\gamma(m)) \sqsubseteq m$.

Funktsiooni α monotoonsuse näitamiseks eeldame, et $l_1 \sqsubseteq l_2$; kasutades juba tõestatut saame, et $l_1 \sqsubseteq l_2 \sqsubseteq \gamma(\alpha(l_2))$ ning kasutades eeldust $\alpha(l) \sqsubseteq m \Leftrightarrow l \sqsubseteq \gamma(m)$ oleme näidanud, et $\alpha(l_1) \sqsubseteq \alpha(l_2)$. Tõestus γ monotoonsuse näitamine on analoogiline. $\square$

Galois' ühenduste omadusi

Väide

$(\forall m \ : \ x \sqsubseteq m \Leftrightarrow y \sqsubseteq m) \Rightarrow x = y$

Lemma

Kui (L, α, γ, M) on Galois' ühendus siis:

1. *α määrab üheselt γ, kus $\gamma(m) = \bigsqcup\{l \mid \alpha(l) \sqsubseteq m\}$ ning γ määrab üheselt α, kus $\alpha(l) = \bigsqcap\{m \mid l \sqsubseteq \gamma(m)\}$.*
2. *α on täielikult aditiivne ning γ on täielikult multiplikatiivne.*

Eelneva järeldusena saame, et $\alpha(\bot) = \bot$ ja $\gamma(\top) = \top$.

Galois' ühenduste omadusi

Väide

$(\forall m \; : \; x \sqsubseteq m \Leftrightarrow y \sqsubseteq m) \Rightarrow x = y$

Lemma

Kui (L, α, γ, M) *on Galois' ühendus siis:*

1. α *määrab üheselt* γ, *kus* $\gamma(m) = \bigsqcup\{\, l \mid \; \alpha(l) \sqsubseteq m\}$ *ning* γ *määrab üheselt* α, *kus* $\alpha(l) = \bigsqcap\{\, m \mid \; l \sqsubseteq \gamma(m)\}$.
2. α *on täielikult aditiivne ning* γ *on täielikult multiplikatiivne.*

Eelneva järeldusena saame, et $\alpha(\bot) = \bot$ *ja* $\gamma(\top) = \top$.

Galois' ühenduste omadusi

α määrab üheselt γ.

Olgu (L, α, γ, M) Galois' ühendus. Kuna tegemist on ka adjunktsiooniga saame:

$$\gamma(m) = \bigsqcup \{ l \mid l \sqsubseteq \gamma(m) \} = \bigsqcup \{ l \mid \alpha(l) \sqsubseteq m \}$$

Olgu (L, α, γ_1, M) ja (L, α, γ_2, M) Galois' ühendused. Valime $m \in M$ suvaliselt; ühesuse saame võrdustest:

$$\gamma_1(m) = \bigsqcup \{ l \mid \alpha(l) \sqsubseteq m \} = \gamma_2(m)$$

□

γ määrab üheselt α.

Analoogne. □

Galois' ühenduste omadusi

α on täielikult aditiivne.

Olgu $L' \subseteq L$, siis:

$$
\begin{aligned}
\alpha(\bigsqcup L') \sqsubseteq m \Leftrightarrow & \bigsqcup L' \sqsubseteq \gamma(m) \\
\Leftrightarrow & \forall l \in L' \;:\; l \sqsubseteq \gamma(m) \\
\Leftrightarrow & \forall l \in L' \;:\; \alpha(l) \sqsubseteq m \\
\Leftrightarrow & \bigsqcup \{\, \alpha(l) |\, l \in L' \} \sqsubseteq m
\end{aligned}
$$

$\square$

γ on täielikult multiplikatiivne.

Analoogne. $\square$

Galois' ühenduste omadusi

Lemma

Kui $\alpha : L \rightarrow M$ on täielikult aditiivne siis leidub selline $\gamma : M \rightarrow L$, et (L, α, γ, M) on Galois' ühendus. Sarnaselt, kui $\gamma : M \rightarrow L$ on täielikult multiplikatiivne siis leidub selline $\alpha : L \rightarrow M$, et (L, α, γ, M) on Galois' ühendus.

α on täielikult aditiivne.

Olgu α täielikult aditiivne ning

$$\gamma(m) = \bigsqcup \{ l' \,|\, \alpha(l') \sqsubseteq m \}$$

siis $\alpha(l) \sqsubseteq m \Rightarrow l \in \{ l' \,|\, \alpha(l') \sqsubseteq m \} \Rightarrow l \sqsubseteq \gamma(m)$. Teise suuna näitamiseks paneme esmalt tähele, et $l \sqsubseteq \gamma(m) \Rightarrow \alpha(l) \sqsubseteq \alpha(\gamma(m))$ kuna α on aditiivne ning seega monotoonne. Nüüd:

$$\begin{aligned} \alpha(l) \sqsubseteq \alpha(\gamma(m)) &= \alpha(\bigsqcup \{ l' \,|\, \alpha(l') \sqsubseteq m \}) \\ &= \bigsqcup \{ \alpha(l') | \, \alpha(l') \sqsubseteq m \} \sqsubseteq m \end{aligned}$$

Näide

Galois‘ ühenduse (mitte)leidumine

Otsime Galois‘ ühendust intervallide domeenist märgidomeeni. Kas see leidub, kui konkretisatsioonifunktsioon

$$\gamma_{IS} : \mathcal{P}(\textbf{Sign}) \to \textbf{Interval}$$

on defineeritud loomulikul viisil (tahvel). Leidumise korral kirjeldada abstraktsioonifunktsioon

$$\alpha_{IS} : \textbf{Interval} \to \mathcal{P}(\textbf{Sign}).$$

Galois‘ ühenduste omadusi

Väide

Kui (L, α, γ, M) *on Galois‘ ühendus, siis* $\alpha \circ \gamma \circ \alpha = \alpha$ *ning* $\gamma \circ \alpha \circ \gamma = \gamma$.

Tõestus.

Tahvel. □

Galois' ühenduste konstrueerimine

Väide

Kui $(L_0, \alpha_1, \gamma_1, L_1)$ *ja* $(L_1, \alpha_2, \gamma_2, L_2)$ *on Galois' ühendused, siis on seda ka:*

$$(L_0, \alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2, L_2)$$

Tõestus.

$$\begin{aligned}
\alpha_2(\alpha_1(l_0)) \sqsubseteq l_2 \Leftrightarrow \\
\alpha_1(l_0) \sqsubseteq \gamma_2(l_2) \Leftrightarrow \\
l_0 \sqsubseteq \gamma_1(\gamma_2(l_2))
\end{aligned}$$

Millest saame, et $(\alpha_2 \circ \alpha_1)(l_0) \sqsubseteq l_2 \Leftrightarrow l_0 \sqsubseteq (\gamma_1 \circ \gamma_2)(l_2)$. Mida oligi vaja näidata. $\square$

Galois' ühenduste konstrueerimine

Väide

Kui $(L_1, \alpha_1, \gamma_1, M_1)$ *ja* $(L_2, \alpha_2, \gamma_2, M_2)$ *on Galois' ühendused siis on seda ka:*

$$(L_1 \times L_2, \alpha, \gamma, M_1 \times M_2)$$

kus:

$$\begin{aligned} \alpha(l_1, l_2) &= (\alpha_1(l_1), \alpha_2(l_2)) \\ \gamma(m_1, m_2) &= (\gamma_1(m_1), \gamma_2(m_2)) \end{aligned}$$

Tõestus.

Näitame, et $\alpha(l_1, l_2) \sqsubseteq (m_1, m_2) \Leftrightarrow (l_1, l_2) \sqsubseteq \gamma(m_1, m_2)$. $\square$

Galois‘ ühenduste konstrueerimine

Väide

Kui (L, α, γ, M) *on Galois‘ ühendus ning* S *mingi hulk siis on Galois‘ ühendus ka:*

$$(S \to L, \alpha', \gamma', S \to M)$$

täielike funktsioonide ruumide vahel võttes:

$$\alpha'(f) = \alpha \circ f$$
$$\gamma'(g) = \gamma \circ g$$

Tõestus.

Näitame, et α' ja γ' on monotoonsed ning, et $\gamma'(\alpha'(f)) \sqsupseteq f$ ja $\alpha'(\gamma'(g)) \sqsubseteq g$. $\square$

Galois‘ ühenduste konstrueerimine

Väide

Olgu $(L_1, \alpha_1, \gamma_1, M_1)$ *ja* $(L_2, \alpha_2, \gamma_2, M_2)$ *Galois‘ ühendused. Sellisel juhul saame konstrueerida Galois‘ ühenduse monotoonsete funktsioonide ruumide vahel:*

$$(L_1 \to L_2, \alpha, \gamma, M_1 \to M_2)$$

valides:

$$\alpha(f) = \alpha_2 \circ f \circ \gamma_1$$
$$\gamma(g) = \gamma_2 \circ g \circ \alpha_1$$

Tõestus.

Näitame, et α ja γ on monotoonsed ning, et $\gamma(\alpha(f)) \sqsupseteq f$ ja $\alpha(\gamma(g)) \sqsubseteq g$. $\square$

Püsipunkti ülekanne

Itereeritavus

Me ütleme, et funktsioon $f : L \to L$ on itereeritav, kui iga ordinaalarvu $o \in \mathbb{O}$ korral f^o on defineeritud.
Iteratsiooni defineerime kui $f^0 = \bot$, $f^{\delta+1} = f(f^\delta)$ ning $f^\lambda = \bigsqcup_{\delta<\lambda} f^\delta$ juhul kui λ on piir ordinaal.

Teoreem (Kleene'i püsipunkti lähend)

Olgu (L, α, γ, M) Galois' ühendus, $f : L \to L$ ning $g : M \to M$ monotoonsed ning seega itereeritavad funktsioonid. Kui α rahuldab tingimust, et $\forall l \in L$ kui $l \sqsubseteq f(l)$ siis leidub $l' \sqsubseteq l$ nii, et $\alpha(f(l)) \sqsubseteq g(\alpha(l'))$. Sellisel juhul $\alpha(lfp(f)) \sqsubseteq lfp(g)$.

Püsipunkti ülekanne

$\alpha(f^\delta) \sqsubseteq g^\delta$.

Baas: $\alpha(f^0) = \alpha(\bot) = \bot = g^0$.
Samm: Eeldame, et $\alpha(f^\delta) \sqsubseteq g^\delta$. Kuna $f^\delta \sqsubseteq f(f^\delta)$ saame eeldust kasutades, et leidub $l' \sqsubseteq f^\delta$ nii, et $\alpha(f^{\delta+1}) \sqsubseteq g(\alpha(l'))$. Tänu g ning α monotoonsusele saame, et $g(\alpha(l')) \sqsubseteq g(\alpha(f^\delta))$. Edasi arvutame:

$$\alpha(f^{\delta+1}) \sqsubseteq g(\alpha(l')) \sqsubseteq g(\alpha(f^\delta)) \sqsubseteq g(g^\delta) = g^{\delta+1}$$

Transfiniitne samm: Olgu λ on suvaline piir ordinaal. Eeldame, et $\forall\delta < \lambda$ korral $\alpha(f^\delta) \sqsubseteq g^\delta$. Arvutame:

$$\alpha(f^\lambda) = \alpha(\bigsqcup_{\delta<\lambda} f^\delta) = \bigsqcup_{\delta<\lambda} \alpha(f^\delta) \sqsubseteq \bigsqcup_{\delta<\lambda} g^\delta = g^\lambda$$

$\square$

Püsipunkti ülekanne

$\alpha(lfp(f)) \sqsubseteq lfp(g)$.

Kleene'i püsipunkti teoreemist saame, et leiduvad ordinaalarvud ϵ ning ϵ' nii, et $lfp(f) = f^{\epsilon}$ ja $lfp(g) = g^{\epsilon'}$. Nüüd saame:

$$\alpha(lfp(f)) = \alpha(f^{\epsilon}) = \alpha(f^{\max\{\epsilon,\epsilon'\}}) \sqsubseteq g^{\max\{\epsilon,\epsilon'\}} = lfp(g)$$

$\square$

Püsipunkti ülekanne

Teoreem (Kleene'i püsipunkti ülekanne)

Olgu (L, α, γ, M) *Galois' ühendus,* $f : L \to L$ *ja* $g : M \to M$ *monotoonsed funktsioonid. Kui* $\alpha \circ f = g \circ \alpha$ *siis:*

- *iga ordinaalarvu* $\delta \in \mathbb{O}$ *korral* $\alpha(f^{\delta}) = g^{\delta}$*;*
- $\alpha(\mathit{lfp}(f)) = \mathit{lfp}(g)$*;*
- *funktsiooni* g *iteratsiooni järk on väiksem, kui* f *iteratsiooni järk.*

Püsipunkti ülekanne

$\alpha(f^\delta) = g^\delta$.

Baas: $\alpha(f^0) = \alpha(\bot) = \bot = g^0$.
Samm: Eeldame, et $\alpha(f^\delta) = g^\delta$. Edasi arvutame:

$$\alpha(f^{\delta+1}) = \alpha(f(f^\delta)) = g(\alpha(f^\delta)) = g(g^\delta) = g^{\delta+1}$$

Transfiniitne samm: Olgu λ piir ordinaal. Eeldame, et iga $\delta < \lambda$ korral $\alpha(f^\delta) = g^\delta$. Jällegi jääb üle ainult arvutada:

$$\alpha(f^\lambda) = \alpha(\bigsqcup_{\delta<\lambda} f^\delta) = \bigsqcup_{\delta<\lambda} \alpha(f^\delta) = \bigsqcup_{\delta<\lambda} g^\delta = g^\lambda$$

$\square$

Püsipunkti ülekanne

$\alpha(lfp(f)) = lfp(g)$.

Olgu ϵ ja ϵ' vastavalt funktsioonide f ja g iteratsiooni järgud ehk vähimad sellised ordinaalarvud, et $lfp(f) = f^{\epsilon}$ ja $lfp(g) = g^{\epsilon'}$. Saame, et

$$\alpha(lfp(f)) = \alpha(f^{\epsilon}) = \alpha(f^{\max\{\epsilon,\epsilon'\}}) = g^{\max\{\epsilon,\epsilon'\}} = g^{\epsilon'} = lfp(g)$$

□

g iteratsiooni järk on väiksem.

Paneme tähele, et

$$g(g^{\epsilon}) = g(\alpha(f^{\epsilon})) = \alpha(f(f^{\epsilon})) = \alpha(f^{\epsilon}) = g^{\epsilon}$$

Seega $\epsilon' \leq \epsilon$.

□

Püsipunkti ülekanne

Lemma

Olgu (L, α, γ, M) Galois' ühendus ja $f : L \to L$ ja $g : M \to M$ monotoonsed funktsioonid mille korral:

$$\alpha \circ f \circ \gamma \sqsubseteq g$$

Siis kõikide $m \in M$ jaoks:

$$g(m) \sqsubseteq m \Rightarrow f(\gamma(m)) \sqsubseteq \gamma(m)$$

ning veelgi enam $lfp(f) \sqsubseteq \gamma(lfp(g))$ ja $\alpha(lfp(f)) \sqsubseteq lfp(g)$.

Püsipunkti ülekanne

Tõestus.

Olgu $g(m) \sqsubseteq m$. Eeldusest $\alpha \circ f \circ \gamma \sqsubseteq g$ saame, et $\alpha(f(\gamma(m))) \sqsubseteq m$. Kuna tegemist on adjunktsiooniga saame vajamineva $f(\gamma(m)) \sqsubseteq \gamma(m)$.

Teise osa tõestamiseks paneme tähele, et

$$\{\gamma(m) \mid g(m) \sqsubseteq m\} \subseteq \{l \mid f(l) \sqsubseteq l\}$$

millest saame omakorda, et

$$\begin{aligned}
\gamma(lfp(g)) = \gamma(\textstyle\bigsqcap Red(g)) = \gamma(\textstyle\bigsqcap\{m \mid g(m) \sqsubseteq m\}) \\
= \textstyle\bigsqcap\{\gamma(m) \mid g(m) \sqsubseteq m\} \\
\sqsupseteq \textstyle\bigsqcap\{l \mid f(l) \sqsubseteq l\} = \textstyle\bigsqcap Red(f) = lfp(f)
\end{aligned}$$

$\square$

Püsipunkti ülekanne

Teoreem (Tarski püsipunkti ülekanne)

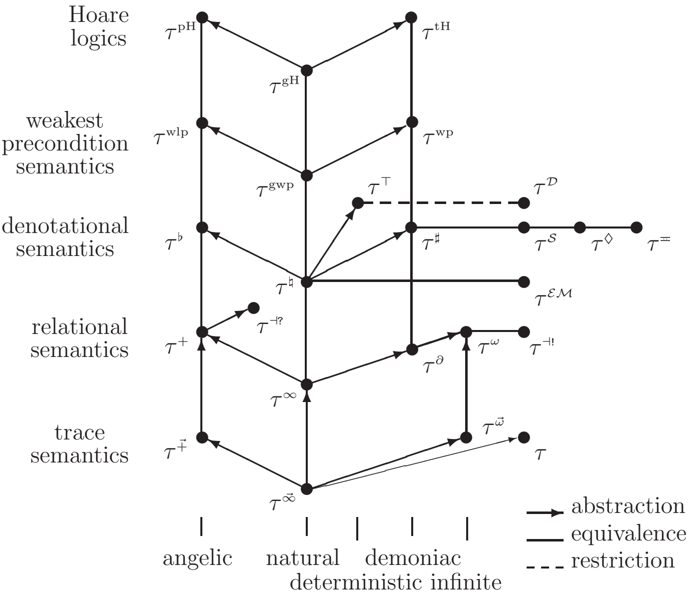
Võttes eelmise lemma eeldustele lisaks, et iga $l \in L$ korral, kui $f(l) \sqsubseteq l$ siis $\exists m \in M$ nii, et $l = \gamma(m)$ ja $g(m) \sqsubseteq m$ siis:

$$lfp(f) = \gamma(lfp(g)) \;\; ja \;\; \alpha(lfp(f)) = lfp(g)$$

Tõestus.

Otsene järeldus eelmise lemma tõestusest. $\square$

Cousot' hierarhia



Cousot' hierarhia

Vaatame paari abstraktsioonifunktsiooni:

$$\alpha_r : \tau^{\vec{\infty}} \to \tau^{\infty}$$
$$\alpha_r(X) = \{\langle a, z\rangle \mid (a, \ldots, z) \in X\} \cup \{\langle a, \perp\rangle \mid (a, b, \ldots) \in X\}$$

$$\alpha_d : \tau^{\infty} \to \tau^{\natural}$$
$$\alpha_d(R) = \lambda a. \{x \mid \langle a, x\rangle \in R\}$$

$$\alpha_n : \tau^{\infty} \to \tau^{+}$$
$$\alpha_n(R) = \{\langle a, x\rangle \in R \mid x \neq \perp\}$$